

# Álgebra Geométrica

Pedro G. Mattos

18 de maio de 2026

## Sumário

|          |                                                                 |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>0</b> | <b>Notações e noções preliminares</b>                           | <b>2</b>  |
| 0.1      | Produtos escalares e formas quadráticas . . . . .               | 2         |
| 0.2      | Espaços esféricos, planos e hiperbólicos . . . . .              | 4         |
| 0.3      | Multi-índices . . . . .                                         | 7         |
| 0.4      | Álgebras sobre corpos . . . . .                                 | 9         |
| 0.5      | Álgebras normadas . . . . .                                     | 9         |
| 0.6      | Álgebra tensorial . . . . .                                     | 11        |
| 0.7      | Automorfismos, antiautomorfismos e involuções . . . . .         | 11        |
| 0.8      | Teoremas de Frobenius e Hurwitz . . . . .                       | 11        |
| <b>1</b> | <b>Álgebra geométrica</b>                                       | <b>12</b> |
| 1.1      | Introdução e motivação . . . . .                                | 12        |
| 1.2      | Álgebra geométrica de um espaço geométrico . . . . .            | 14        |
| 1.3      | Involuções da álgebra geométrica . . . . .                      | 17        |
| 1.4      | Produtos da álgebra geométrica . . . . .                        | 21        |
| <b>2</b> | <b>Transformações ortogonais e representação adjunta</b>        | <b>32</b> |
| 2.1      | Projeções, reflexões e rotações . . . . .                       | 32        |
| 2.2      | Ortores e rotores . . . . .                                     | 38        |
| <b>3</b> | <b>Cálculo geométrico</b>                                       | <b>45</b> |
| 3.1      | Retângulos, cadeias de retângulos e bordos . . . . .            | 46        |
| 3.2      | Volume no espaço $d$ -dimensional real $\mathbb{R}^d$ . . . . . | 48        |
| 3.3      | Integração de campos multivetoriais . . . . .                   | 48        |
| 3.4      | A derivada como variação nas extremidades . . . . .             | 49        |
| 3.5      | Derivada geométrica . . . . .                                   | 50        |

## 0 Notações e noções preliminares

Uma *transformação* (ou *função*)  $f$  de um conjunto  $C$  para um conjunto  $C'$  é denotada  $f: C \rightarrow C'$  e a composição de transformações  $f: C \rightarrow C'$  e  $f': C' \rightarrow C''$  é denotada  $f' \circ f: C \rightarrow C''$ . A transformação *identidade* em  $C$  é  $I = I_C: C \rightarrow C$ .

O conjunto vazio é denotado  $\emptyset$ , o conjunto ponto,  $1 = \{0\}$ , e o conjunto dupla,  $2 = \{0, 1\}$ . Dado um conjunto “universo”  $C$ , o conjunto das partes de  $C$  (o conjunto de todos seus subconjuntos) é denotado  $2^C$ , e o complemento de conjunto (em  $C$ ) de um subconjunto  $S \subseteq C$  é denotado  $\bar{S} = C \setminus S$ .

Os números naturais são denotados  $\mathbb{N}$  e incluem 0 (zero), e, para todo número natural  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto dos primeiros  $n$  números naturais é denotado

$$[n] := \{n' \in \mathbb{N} \mid n' < n\} = \{0, \dots, n-1\}.$$

Os números inteiros são  $\mathbb{Z}$ , os números racionais,  $\mathbb{Q}$ , e os números reais,  $\mathbb{R}$ . Os inteiros positivos, estritamente positivos, negativos e estritamente negativos são denotados  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$  e  $\mathbb{Z}_{<0}$ , respectivamente. Notação análoga é usada para os outros conjuntos numéricos ordenados.

Denotamos o corpo dos números reais por  $\mathbb{R}$  e o grupo multiplicativo de  $\mathbb{R}$ , composto pelos elementos invertíveis com respeito ao produto, por  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus 1$ . O espaço vetorial real  $d$ -dimensional é  $\mathbb{R}^d$ . Note que o espaço vetorial real de dimensão 0 é o ponto:  $\mathbb{R}^0 = 1$ . A esfera em  $d$ -dimensional é denotada  $\mathbb{S}^d$  (isso inclui  $\mathbb{S}^0 = \{1, -1\}$ ).

### 0.1 Produtos escalares e formas quadráticas

**Definição 0.1.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um produto (geométrico) escalar em  $V$  é uma função bilinear simétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Um espaço geométrico real é um par  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  em que  $V$  é um espaço vetorial real e  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é um produto escalar.

Um vetor unitário positivo é um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\langle v, v \rangle = 1$ , um vetor unitário negativo é um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\langle v, v \rangle = -1$ , e um vetor nulário é um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Note que 0 é sempre nulário por causa da bilinearidade mas, de modo geral, não podemos garantir que o único vetor nulário é o 0. Podemos classificar produtos escalares de acordo com a existência de vetores unitários positivos ou negativos e vetores nulários. Para isso, definimos os seguintes tipos de formas bilineares simétricas.

**Definição 0.2.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Uma função bilinear simétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é

- *positivo-definida* quando, para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ ,  $\langle v, v \rangle > 0$ ;
- *positivo-semidefinida* quando, para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ ,  $\langle v, v \rangle \geq 0$ ;
- *negativo-definida* quando, para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ ,  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- *negativo-semidefinida* quando, para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ ,  $\langle v, v \rangle \leq 0$ ;
- *degenerada* quando existe  $w \in V \setminus \{0\}$  tal que, para todo  $v \in V$ ,  $\langle w, v \rangle = 0$ , e *não-degenerada* caso contrário: se existe  $w \in V$  tal que, para todo  $v \in V$ ,  $\langle w, v \rangle = 0$ , então  $w = 0$ .

Somente sabendo os valores  $\langle v, v \rangle$ , podemos recuperar o valor de  $\langle v, v' \rangle$  através da bilinearidade e da simetria, pois, para todos  $v, v' \in V$ ,

$$\begin{aligned} 2\langle v, v' \rangle &= \langle v, v' \rangle + \langle v', v \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, v' \rangle + \langle v', v \rangle + \langle v', v' \rangle - \langle v, v \rangle - \langle v', v' \rangle \\ &= \langle v + v', v + v' \rangle - \langle v, v \rangle - \langle v', v' \rangle, \end{aligned}$$

logo

$$\langle v, v' \rangle = \frac{1}{2}(\langle v + v', v + v' \rangle - \langle v, v \rangle - \langle v', v' \rangle).$$

Definimos assim a noção de uma forma quadrática.

**Definição 0.3.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um *norma quadrática* (ou *forma quadrática*) em  $V$  é uma função  $\langle \cdot \rangle^2 : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1. (Quadrática) Para todos  $c \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ ,  $\langle cv \rangle^2 = c^2 \langle v \rangle^2$ ;
2. (Bilinear) Para todos  $v, v' \in V$ , a função  $\langle v + v' \rangle^2 - \langle v \rangle^2 - \langle v' \rangle^2$  é bilinear.

O *produto escalar*<sup>1</sup> associado a  $\langle \cdot \rangle^2$  é a forma bilinear simétrica

$$\langle v, v' \rangle := \frac{1}{2}(\langle v + v' \rangle^2 - \langle v \rangle^2 - \langle v' \rangle^2).$$

Para a próxima definição, lembremos que quando temos um multi-índice  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ , denotamos seu valor absoluto por

$$|d| = d_- + d_0 + d_+.$$

**Definição 0.4.** Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $\{e_h \mid 0 \leq h < |d|\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{|d|}$ . O *produto escalar canônico de assinatura  $d$*  em  $\mathbb{R}^d$  é o produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathbb{R}^d$  tal que

1. Para todo  $0 \leq h < d_-$ ,  $\langle e_h, e_h \rangle = -1$ ;
2. Para todo  $d_- \leq h < d_- + d_0$ ,  $\langle e_h, e_h \rangle = 0$ ;
3. Para todo  $d_- + d_0 \leq h < d_- + d_0 + d_+$ ,  $\langle e_h, e_h \rangle = 1$ .

Denota-se o espaço

$$\mathbb{R}^d := \mathbb{R}^{d_-, d_0, d_+} := \mathbb{R}^{d_-} \times \mathbb{R}^{d_0} \times \mathbb{R}^{d_+}$$

e identifica-se  $\mathbb{R}^d$  com  $\mathbb{R}^{|d|}$ . A base canônica de  $\mathbb{R}^d$  é denotada

1. Para todo  $0 \leq h < d_-$ ,  
 $j_h := e_h$ ;
2. Para todo  $0 \leq h < d_0$ ,  
 $\epsilon_h := e_{d_- + h}$ ;
3. Para todo  $0 \leq h < d_+$ ,  
 $i_h := e_{d_- + d_0 + h}$ .

Com essa notação, vale

1. Para todo  $0 \leq h < d_-$ ,  
 $\langle j_h, j_h \rangle = -1$ ;
2. Para todo  $0 \leq h < d_0$ ,  
 $\langle \epsilon_h, \epsilon_h \rangle = 0$ ;
3. Para todo  $0 \leq h < d_+$ ,  
 $\langle i_h, i_h \rangle = 1$ .

---

1. Note que no caso de o corpo dos reais  $\mathbb{R}$  ser substituído por um corpo qualquer, essas definições ficam iguais, mas o fator  $\frac{1}{2}$  deve ser omitido quando a característica do corpo é 2.

## Espaços ortogonais

O produto escalar de um espaço geométrico  $\mathbb{R}^d$  é denegado se, e somente se,  $d_0 = 0$ ; ou seja, sua assinatura é da forma  $(d_-, 0, d_+)$ .

**Definição 0.5.** Um *espaço ortogonal* é um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  cujo produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não-degenerado.

Seja  $d = (d_-, d_+) \in \mathbb{N}^2$ . O *espaço ortogonal canônico de assinatura  $d = (d_-, d_+)$*  é o espaço geométrico canônico  $\mathbb{R}^{d_-, 0, d_+}$ . Denota-se

$$\mathbb{R}^d := \mathbb{R}^{d_-, d_+} := \mathbb{R}^{d_-} \times \mathbb{R}^{d_+}$$

e identifica-se  $\mathbb{R}^d$  com  $\mathbb{R}^{d_-, 0, d_+}$ .

## Transformações rígidas (movimentações?)

**Definição 0.6.** Sejam  $d, d' \in \mathbb{N}$  e  $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e  $(\mathbb{R}^{d'}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  espaços geométricos. Uma *transformação rígida* de  $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  para  $(\mathbb{R}^{d'}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  é uma transformação linear  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  tal que, para todos  $v, v' \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\langle f(v), f(v') \rangle' = \langle v, v' \rangle.$$

Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Denota-se o conjunto de transformações rígidas de  $\mathbb{R}^d$  para  $\mathbb{R}^d$  por  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{d_-, d_0, d_+})$  ou  $\mathcal{O}(d_-, d_0, d_+)$ .

Caso  $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e  $(\mathbb{R}^{d'}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  sejam espaços ortogonais, diz-se *transformação ortogonal* e denota-se  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{d_-, d_+})$  ou  $\mathcal{O}(d_-, d_+)$ .

Um resultado elementar de álgebra linear caracteriza todos os produtos escalares/formas quadráticas em  $\mathbb{R}^d$  de acordo com um isomorfismo rígido com uma forma canônica.

**Proposição 0.1** (Lei de inércia de Sylvester). *Seja  $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle')$  um espaço ortogonal. Então existem únicos  $d_-, d_0, d_+ \in \mathbb{N}$  tais  $d = d_- + d_0 + d_+$  e existe uma transformação ortogonal  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_-, d_0, d_+}$ .*

## 0.2 Espaços esféricos, planos e hiperbólicos

A seguir, consideraremos o espaço  $\mathbb{R}^{d+1}$  com a forma quadrática canônica

$$\langle p \rangle_{d+1}^2 = p_0^2 + \cdots + p_{d-1}^2 + p_d^2,$$

o espaço  $\mathbb{R}^{d,1}$  com a forma quadrática canônica

$$\langle p \rangle_{d,1}^2 = -p_0^2 + \cdots - p_{d-1}^2 + p_d^2,$$

e o espaço  $\mathbb{R}^{0,d,1}$  com a forma quadrática canônica

$$\langle p \rangle_{0,d,1}^2 = p_d^2.$$

**Definição 0.7.** Seja  $d \in \mathbb{N}$ . A *esfera  $d$ -dimensional* é o conjunto

$$\mathbb{S}^d := \{p \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \langle p \rangle_{d+1}^2 = 1\}.$$

O *hiperboloide  $d$ -dimensional* é o conjunto

$$\mathbb{H}^d := \{p \in \mathbb{R}^{d,1} \mid \langle p \rangle_{d,1}^2 = 1\}$$

e a componente positiva de  $\mathbb{H}^d$  é o conjunto

$$\mathbb{H}_+^d := \{p \in \mathbb{H}^d \mid p_d > 0\}.$$

O espaço plano  $d$ -dimensional é o conjunto

$$\mathbb{E}^d := \{p \in \mathbb{R}^{0,d,1} \mid \langle p \rangle_{0,d,1}^2 = 1\}.$$

e a componente positiva de  $\mathbb{E}^d$  é o conjunto

$$\mathbb{E}_+^d := \{p \in \mathbb{E}^d \mid p_d > 0\}.$$

### Parametrizações de $\mathbb{S}^d$ , $\mathbb{E}^d$ e $\mathbb{H}^d$

**Esfera  $\mathbb{S}^d$**  Consideremos o espaço geométrico  $\mathbb{R}^{d+1}$  com a métrica

$$\langle x \rangle_{d+1}^2 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_d^2.$$

A esfera  $\mathbb{S}_\pm^d$  é o conjunto

$$\mathbb{S}_\pm^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \langle x \rangle_{d+1}^2 = 1, \pm x_d \geq 0\}.$$

Consideramos a parametrização com o parâmetro discreto  $\sigma \in \{\pm 1\}$ , que determina a folha  $\mathbb{S}_\sigma^d$ , e os parâmetros contínuos  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]^d$ , dada por

$$(1) \quad \begin{aligned} x_0 &= \sin(\theta_0) \\ x_1 &= \cos(\theta_0) \sin(\theta_1) \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= \cos(\theta_0) \cdots \cos(\theta_{d-2}) \sin(\theta_{d-1}) \\ x_d &= \sigma \cos(\theta_0) \cos(\theta_{d-2}) \cdots \cos(\theta_{d-1}). \end{aligned}$$

Note que, como  $\cos$  é positivo em  $[-\pi/2, \pi/2]$ , o sinal de  $x_l$  é determinado por  $\sin(\theta_l)$  para  $0 \leq l < d$  e por  $\sigma$  para  $x_d$ .

Essa parametrização não é a parametrização usual da esfera, pois de fato são “duas parametrizações em uma” devido à variável discreta  $\sigma \in \{\pm 1\}$ . Apresentamos ela aqui para ressaltar a semelhança que ela tem com as parametrizações de  $\mathbb{E}^d$  e  $\mathbb{H}^d$  que apresentaremos a seguir. Para transformar a parametrização dada pela **FÓRMULA (1)** em uma única parametrização, podemos alternativamente considerar  $\theta_{d-1} \in [\pi, \pi]$  e descartar o parâmetro discreto  $\sigma \in \{\pm 1\}$ .

**Hiperboloide  $\mathbb{H}^d$**  Consideremos o espaço geométrico  $\mathbb{R}^{d,1}$  com a métrica

$$\langle x \rangle_{d,1}^2 = -x_0^2 - \cdots - x_{d-1}^2 + x_d^2.$$

O hiperboloide  $\mathbb{H}_\pm^d$  é o conjunto

$$\mathbb{H}_\pm^d = \{x \in \mathbb{R}^{d,1} \mid \langle x \rangle_{d,1}^2 = 1, \pm x_d \geq 0\}.$$

O hiperbolóide  $d$ -dimensional  $\mathbb{H}^d$  tem duas componentes conexas,  $\mathbb{H}_+^d$  e  $\mathbb{H}_-^d$ , denominadas *semihiperbolóides superior/inferior*, diferente do caso da esfera  $\mathbb{S}^d$  com  $d \geq 1$ , que é sempre conexa. Cada uma das componentes conexas de  $\mathbb{H}^d$  é um espaço hiperbólico  $d$ -dimensional. Novamente usamos um parâmetro discreto  $\sigma \in \{\pm 1\}$ , dessa vez necessário, para indicar o semihiperboloide superior/inferior.

A relação que determina o hiperbolóide  $d$  é

$$-x_0^2 - \dots - x_{d-1}^2 + x_d^2 = 1.$$

Consideremos um parâmetro  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$-x_1^2 - \dots - x_{d-1}^2 + x_d^2 = y_0^2.$$

A relação acima é então equivalente a

$$-x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

Pela definição do cosseno e seno hiperbólicos, podemos tomar  $\sigma \in \{\pm 1\}$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} x_0 &= \sinh(\theta_0), \\ y_0 &= \sigma \cosh(\theta_0). \end{aligned}$$

Note que todos possíveis valores de  $x_0 \in \mathbb{R}$  são obtidos dessa maneira, pois a imagem de  $\sinh(\theta_0)$  é  $\mathbb{R}$  para  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Temos então a relação

$$-x_1^2 - \dots - x_{d-1}^2 + x_d^2 = \cosh(\theta_0)^2.$$

Como  $\cosh(\theta_0) > 0$ , isso é equivalente a

$$-\left(\frac{x_1}{\cosh(\theta_0)}\right)^2 - \dots - \left(\frac{x_{d-1}}{\cosh(\theta_0)}\right)^2 + \left(\frac{x_d}{\cosh(\theta_0)}\right)^2 = 1.$$

Essa relação determina um hiperboloide  $(d-1)$ -dimensional. Podemos então repetir o processo anterior para obtermos parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_{d-1} \in \mathbb{R}$ .

Obtemos assim a parametrização<sup>2</sup> com o parâmetro discreto  $\sigma \in \{\pm 1\}$ , que determina a folha  $\mathbb{H}_\sigma^d$ , e os parâmetros contínuos  $\theta \in \mathbb{R}^d$ , dada por

$$\begin{aligned} x_0 &= \sinh(\theta_0) \\ x_1 &= \cosh(\theta_0) \sinh(\theta_1) \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= \cosh(\theta_0) \cdots \cosh(\theta_{d-2}) \sinh(\theta_{d-1}) \\ x_d &= \sigma \cosh(\theta_0) \cosh(\theta_{d-2}) \cdots \cosh(\theta_{d-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Note que, como  $\cosh$  é positivo em  $\mathbb{R}$ , o sinal de  $x_l$  é determinado por  $\sinh(\theta_l)$  para  $0 \leq l < d$  e por  $\sigma$  para  $x_d$ .

Notemos que usamos nessa parametrização o cosseno hiperbólico  $\cosh(\theta)$  e o seno hiperbólico  $\sinh(\theta)$ , definidos como a parte par e a parte ímpar da exponencial  $e^\theta$ , respectivamente. Isso significa que

$$\begin{aligned} \cosh(\theta) &:= \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \\ \sinh(\theta) &:= \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}. \end{aligned}$$

A nomenclatura está relacionada com o fato do cosseno ser a parte par da exponencial complexa, e o seno ser sua parte ímpar.

2. <https://math.stackexchange.com/questions/697245/parametrization-of-the-hyperboloid-of-two-sheets>

Quando temos um elemento  $i$  de uma álgebra sobre um corpo (normada) que satisfaz  $i^2 = 1$ , temos para todo  $\theta \in \mathbb{R}$  a relação

$$e^{\theta i} = \cosh(\theta) + \sinh(\theta)i.$$

Isso segue diretamente da definição por série da exponencial, do seno e cosseno hiperbólicos.

Por outro lado, quando temos um elemento  $j$  da álgebra que satisfaz  $j^2 = -1$ , temos a relação

$$e^{\theta j} = \cos(\theta) + \sin(\theta)j.$$

Isso também segue diretamente da definição por série da exponencial, do seno e cosseno.

Existe um terceiro caso, em que um elemento  $\varepsilon$  da álgebra satisfaz  $\varepsilon^2 = 0$ . Nesse caso a exponencial fica simplesmente

$$e^{\theta \varepsilon} = 1 + \theta \varepsilon.$$

Como veremos adiante, o estudo das álgebras geométricas mostra que o caso  $i^2 = 1$  está relacionado com o hiperbolóide  $d$  e a geometria do espaço hiperbólico, o caso  $j^2 = -1$  está relacionado com a esfera  $\mathbb{S}^d$  e sua geometria, e o caso  $\varepsilon^2 = 0$  está relacionado com a geometria do espaço plano  $\mathbb{E}^d$ . Por isso, podemos pensar na função constante  $\cosh(\theta) := 1$ , a parte par de  $e^{t\varepsilon}$ , como o “cosseno plano”, e na função identidade  $\sinh(\theta) := t$ , a parte ímpar de  $e^{t\varepsilon}$ , como “seno plano”.

**Plano  $\mathbb{E}^d$**  Usando a analogia entre as funções seno e cosseno (esféricos e hiperbólicos) com as funções 1 e I, as parametrizações dadas pelas **FÓRMULAS (1) e (2)** podem ser adaptadas para  $\mathbb{E}^d$ .

Consideremos o espaço geométrico  $\mathbb{R}^{0,d,1}$  com a métrica

$$\langle x \rangle_{0,d,1}^2 = x_d^2.$$

O plano  $\mathbb{E}_\pm^d$  é o conjunto

$$\mathbb{E}_\pm^d = \{x \in \mathbb{R}^{0,d,1} \mid \langle x \rangle_{0,d,1}^2 = 1, \pm x_d \geq 0\}.$$

O espaço afim  $\mathbb{E}^d$  também tem duas componentes conexas, e novamente o parâmetro discreto  $\sigma$  irá indicá-las. Substituindo nas relações da **FÓRMULA (2)** a função constante 1 no lugar do cosseno  $\cosh(\theta_l)$  e a função identidade  $I(\theta_l) = \theta_l$  no lugar do seno  $\sinh(\theta_l)$ , obtemos a parametrização trivial para o plano. Essa é a parametrização com o parâmetro discreto  $\sigma \in \{\pm 1\}$ , que determina a folha  $\mathbb{E}_\sigma^d$ , e os parâmetros contínuos  $\theta \in \mathbb{R}^d$ , dada por

$$(3) \quad \begin{aligned} x_0 &= \theta_0 \\ x_1 &= \theta_1 \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= \theta_{d-1} \\ x_d &= \sigma. \end{aligned}$$

Note que, como 1 é positivo em  $\mathbb{R}$ , o sinal de  $x_l$  é determinado por  $\theta_l$  para  $0 \leq l < d$  e por  $\sigma$  para  $x_d$ .

### 0.3 Multi-índices

A notação de multi-índices facilita muito quando precisamos usar muitos índices numa mesma fórmula ou expressão. A seguir descrevemos as definições e notações padrão relativas a eles.

Consideremos os multi-índices  $h = (h_0, \dots, h_{m-1}) \in \llbracket d \rrbracket^m$ , em que  $0 \leq m \leq d$ . Para  $m = 0$ , esse é o multi-índice vazio  $\mathbb{0}$ . O conjunto dos multi-índices estritamente crescentes é denotado

$$\binom{d}{m} := \{h \in \llbracket d \rrbracket^m \mid h_0 < \dots < h_{m-1}\}$$

Note que a cardinalidade desse conjunto é igual ao coeficiente binomial  $\binom{d}{m}$  (lê-se  $d$  escolhe  $m$ ), ou seja

$$\left| \binom{d}{m} \right| = \binom{d}{m} = \frac{d!}{m!(d-m)!}.$$

Cada função  $h \in \binom{d}{m}$  pode ser identificada com um subconjunto de  $\llbracket d \rrbracket$  com cardinalidade  $m$ , a saber  $\{h_0, \dots, h_{m-1}\} \subseteq \llbracket m \rrbracket$ . O conjunto desses subconjuntos é denotado

$$\left\{ \binom{\llbracket d \rrbracket}{m} \right\} := \{C \subseteq \llbracket d \rrbracket \mid |C| = m\}$$

e vale  $\bigcup_{0 \leq m \leq d} \left\{ \binom{\llbracket d \rrbracket}{m} \right\} = 2^d$ .

Em particular, considerando todos  $0 \leq m \leq d$ , há  $2^d$  multi-índices estritamente crescentes distintos, e vale

$$\sum_{0 \leq m \leq d} \binom{d}{m} = 2^d.$$

Sejam  $d, m \in \mathbb{N}^k$  multi-índices. A ordem em  $\mathbb{N}^k$  é dada por  $m \leq d$  se, e somente se, para todo  $0 \leq l < k$ ,  $m_l \leq d_l$ .

Denotamos o multi-índice nulo  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^k$  por  $\mathbb{0}$ . Podemos definir a *soma* de multi-índices  $d, d' \in \mathbb{N}^k$  por

$$d + d' := (d_0 + d'_0, \dots, d_{k-1} + d'_{k-1}) \in \mathbb{N}^k$$

e, se  $d \leq d'$ , a *diferença* de  $d$  para  $d'$  por

$$d' - d := (d'_0 - d_0, \dots, d'_{k-1} - d_{k-1}) \in \mathbb{N}^k.$$

Seja  $d = (d_0, \dots, d_{k-1}) \in \mathbb{N}^k$  um multi-índice. O *tamanho* de  $d$  é

$$|d| = d_0 + \dots + d_{k-1}.$$

Definimos o *fatorial* de  $d$  por

$$d! := d_0! \cdots d_{k-1}!$$

e o *coeficiente binomial*

$$\binom{d}{m} := \binom{d_0}{m_0} \cdots \binom{d_{k-1}}{m_{k-1}}.$$

Definimos o *coeficiente multinomial*

$$\binom{|d|}{m} := \frac{|d|!}{m!} = \frac{|d|!}{m_0! \cdots m_{k-1}!}.$$

Vale

$$\sum_{0 \leq m \leq d} \binom{|d|}{m} = 2^{|d|}.$$



## 0.4 Álgebras sobre corpos

## 0.5 Álgebras normadas

### Exponencial

**Definição 0.8.** Sejam  $(A, \|\cdot\|)$  uma álgebra normada (com unidade) sobre  $\mathbb{R}$  e  $a \in A$ . A *exponencial* de  $a$  é a série

$$e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots.$$

Segue da subaditividade da norma que

$$\|e^a\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|} < \infty,$$

portanto a série converge absolutamente.

A exponencial de um número real converge absolutamente pelo teste da razão, fixado um raio  $r$  para o domínio. Seja  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $a \in B(0, r) \subseteq A$ . Então

$$e^{\|a\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$$

Pelo teste da razão vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r}{n+1} \right| = 0,$$

portanto a série exponencial é absolutamente convergente para qualquer raio  $r$ .

**Definição 0.9.** Sejam  $(A, \|\cdot\|)$  uma álgebra normada (com unidade) sobre  $\mathbb{R}$  e  $a \in A$ . O *cosseno* de  $a$  é a série

$$\cos(a) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{a^2}{2} + \dots.$$

O *seno* de  $a$  é a série

$$\sin(a) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = a - \frac{a^3}{3!} + \dots.$$

O *cosseno hiperbólico* de  $a$  é a série

$$\cosh(a) := \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{a^2}{2} + \dots.$$

O *seno hiperbólico* de  $a$  é a série

$$\sinh(a) := \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = a + \frac{a^3}{3!} + \dots.$$

O cosseno hiperbólico é a parte par da exponencial, enquanto que o seno hiperbólico é sua parte ímpar. As funções cosseno e seno também são par e ímpar, respectivamente.

**Proposição 0.2.** Sejam  $(A, \|\cdot\|)$  uma álgebra normada sobre  $\mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $a \in A$ .

1. Se  $a^2 = 1$ , então  $e^{ta} = \cosh(t) + \sinh(t)a$ .

2. Se  $a^2 = 0$ , então  $e^{ta} = 1 + ta$ .
3. Se  $a^2 = -1$ , então  $e^{ta} = \cos(t) + \sin(t)a$ .

*Demonstração.* Sempre vale

$$e^{ta} = \cosh(ta) + \sinh(ta).$$

Usando a expansão de  $\cosh$  e  $\sinh$  em série, concluímos que

1. Se  $a^2 = 1$ , então  $\cosh(ta) = \cosh(t)$  e  $\sinh(ta) = \sinh(t)a$ .
2. Se  $a^2 = 0$ , então  $\cosh(ta) = 1$  e  $\sinh(ta) = ta$ .
3. Se  $a^2 = -1$ , então  $\cosh(ta) = \cos(t)$  e  $\sinh(ta) = \sin(t)a$ .

■

Notemos que

$$\cos(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{2^2}{2} + \dots$$

Denotemos  $c_n := (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$ . Note que

$$c_{n+1} = \frac{2^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} = \frac{2^2}{(2n+2)(2n+1)} \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{(n+1)(2n+1)} c_n,$$

portanto, para  $n \geq 1$ , os termos  $c_n$  decrescem estritamente em valor absoluto, logo

$$-c_n + c_{n+1} = -c_n + \frac{2^2}{(2n+2)(2n+1)} c_n = -\left(1 - \frac{2}{(n+1)(2n+1)}\right) c_n < 0.$$

Isso implica que, além dos três primeiros termos, podemos agrupar os termos restantes da série e sua soma tem um valor negativo, logo

$$\cos(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} + \sum_{m=1}^{\infty} (-c_{2m+1} + c_{2m+2}) < 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Como  $\cos(x)$  é função contínua e  $\cos(0) = 1$ , pelo Teorema do Valor Intermediário segue que existe um  $\lambda \in ]0, 2[$  mínimo tal que

$$\cos(\lambda) = 0.$$

Esse valor  $\lambda$  é o valor de um ângulo reto,  $\lambda \approx 1,570796327 \dots$

Notemos também que

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$$

e

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos(x).$$

Ainda, diferenciando  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2$  obtemos

$$\frac{d}{dx} (\cos(x)^2 + \sin(x)^2) = 2 \cos(x)(-\sin(x)) + 2 \sin(x) \cos(x) = 0,$$

portanto  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2$  é constante e tem valor

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = \cos(0)^2 + \sin(0)^2 = 1^2 + 0^2 = 1,$$

o que mostra que  $(\sin(x), \cos(x)) \in \mathbb{S}^1$ , ou seja, a trajetória  $c(x) := (\sin(x), \cos(x))$  está no círculo unitário. Como  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  e  $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ , segue que

$$\left(\frac{d}{dx} \cos(x)\right)^2 + \left(\frac{d}{dx} \sin(x)\right)^2 = 1,$$

o que mostra que a norma de  $\dot{c}$ , a velocidade da trajetória  $c$ , é constante igual a 1.

## 0.6 Álgebra tensorial

### 0.7 Automorfismos, antiautomorfismos e involuções

**Definição 0.10.** Sejam  $(A, \times)$  uma álgebra (unitária?) sobre um corpo. Um *automorfismo de álgebra* de  $A$  é um automorfismo linear  $f : A \rightarrow A$  que satisfaz, para todos  $a, a' \in A$ ,

$$f(a \times a') = f(a) \times f(a').$$

Um *antiautomorfismo de álgebra* de  $A$  é um automorfismo linear  $f : A \rightarrow A$  que satisfaz, para todos  $a, a' \in A$ ,

$$f(a \times a') = f(a') \times f(a).$$

Se  $(A, \times, 1)$  é uma álgebra unitária, um (anti)automorfismo deve satisfazer  $f(1) = 1$ .

**Proposição 0.3.** Sejam  $(A, \times)$  uma álgebra (unitária) sobre um corpo e  $b_0, \dots, b_{d-1}$  uma base que gera  $A$  como álgebra. Um (anti)automorfismo de álgebra  $f : A \rightarrow A$  está completamente determinado por sua ação na base  $b_0, \dots, b_{d-1}$ .

**Definição 0.11.** Uma *involução* (linear) é uma transformação linear  $f : A \rightarrow A$  tal que  $f^2 = I$ .

### 0.8 Teoremas de Frobenius e Hurwitz

Denotemos os números reais por  $\mathbb{R}$ , os números complexos por  $\mathbb{R}_2$  e os números quatérnios  $\mathbb{R}_4$ .

**Proposição 0.4** (Frobenius). Toda álgebra de divisão associativa<sup>3</sup>  $A$  sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão finita é isomorfa aos números reais  $\mathbb{R}$ , aos números complexos  $\mathbb{R}_2$  ou aos números quatérnios  $\mathbb{R}_4$ .

*Demonstração.* A demonstração envolve mostrar que  $A$  pode ser escrita como soma direta de  $\mathbb{R}$  com um espaço vetorial  $V$ , então definir uma forma bilinear positivo-definida em  $V$ , e então mostrar que  $A$  é uma álgebra geométrica real. Isso implica que  $A$  deve ser isomorfa a  $\mathbb{R} \simeq \mathbb{A}(0, 0)$ ,  $\mathbb{R}_2 \simeq \mathbb{A}(1, 0)$  ou  $\mathbb{R}_4 \simeq \mathbb{A}(2, 0)$ . ■

**Proposição 0.5** (Hurwitz). Toda álgebra de composição sobre  $\mathbb{R}$  (álgebra de divisão normada) é isomorfa aos números reais  $\mathbb{R}$ , aos números complexos  $\mathbb{R}_2$ , aos números quatérnios  $\mathbb{R}_4$  ou aos números octônios  $\mathbb{R}_8$ .

*Demonstração.* Uma demonstração possível também envolve relacionar essa álgebra com uma álgebra geométrica. ■

3. Álgebras de divisão associativas sempre têm unidade.

# 1 Álgebra geométrica

## 1.1 Introdução e motivação

### O produto de vetores

Um dos modos fundamentais de interpretar geometricamente o produto de números reais é pensar em um retângulo cujos lados têm o tamanho de cada um dos números. O produto desses números é então a área do retângulo. Quando pensamos nessa construção, depois de calcularmos a área a informação de que tínhamos formado um retângulo é ignorada, bem como a informação de que cada lado do retângulo é um segmento de reta. Implicitamente, estamos pensando em cada número real como um segmento de reta, e no produto desses números como um “segmento de plano” — o retângulo. No entanto, esses segmentos não estão contidos numa mesma “reta real”, pois eles são ortogonais. Eles estão contidos no plano em que o retângulo foi formado.

Segmentos de reta são formalizados com a noção de um *vetor*. Um vetor é um segmento de reta orientado e, nesse contexto, os números reais são denominados *escalares*. Assim como os números reais, o conjunto dos vetores — chamado *espaço vetorial* — possui uma estrutura algébrica de grupo aditivo junto a uma ação pelos números reais:

1. a *soma* de vetores é uma operação binária que, geometricamente, consiste em sobrepor um vetor na extremidade do outro, resultando no vetor que liga a extremidade inicial do primeiro vetor à extremidade final do segundo vetor. Essa operação é associativa e comutativa.
2. existe o vetor *zero*, representado pela origem do espaço, que é o elemento neutro da soma de vetores,
3. todo vetor tem um *inverso aditivo*, que é o mesmo segmento de reta, mas com orientação oposta.
4. um vetor pode ser multiplicado por escalar, resultando da dilatação do vetor pela magnitude do escalar, e invertendo a orientação do vetor caso o escalar seja negativo.

Um dos pontos importantes da interpretação de um produto de números reais como a área de um retângulo descrita acima é que, assim definida, ela só faz sentido para números reais positivos, pois o lado e a área de um retângulo têm magnitude positiva. Queremos estender a interpretação para segmentos de plano orientados, isto é, retângulos que têm, além do valor de sua área, uma orientação. Uma maneira de fazer isso é pensar nos lados do retângulo como segmentos orientados, isto é, vetores, e atribuir uma orientação ao retângulo de acordo com a orientação de seus lados. Vamos nos referir a um retângulo cujos lados são vetores como um *retângulo orientado*, ou um *bivetor*. Um bivetor é um segmento orientado do plano.

Seguindo as regras de multiplicação de números positivos e negativos em  $\mathbb{R}$ , que podem ser reduzidas à multiplicação em  $S^0 = \{1, -1\}$ , poderíamos definir que um bivetor tem orientação positiva quando ambos seus lados são vetores positivamente orientados ou negativamente orientados, e tem orientação negativa quando um de seus lados é positivamente orientado, enquanto que o outro é negativamente orientado. No entanto, a definição deve ser mais sutil do que essa, pois no plano (e no espaço em geral) não existe uma noção absoluta de vetor positivamente ou negativamente orientado.

O que devemos estabelecer, no mínimo, para que as regras de multiplicação em  $S^0$  valham, é que a orientação de um retângulo muda quando invertemos a orientação de um dos lados, o que consequentemente implica que ela se mantém igual se a orientação de ambos os lados é invertida. Dessa forma, duas classes de retângulos orientados são formadas, e é possível notar que dois retângulos estão na mesma classe de orientação, ou são *coorientados*, quando um pode ser levado ao outro através de uma rotação (e translação se não fixamos a origem), de modo que seus lados orientados coincidam, e que, por outro lado, dois retângulos estão em classes opostas de orientação, ou são *contraorientados*, quando isso não é possível ou, equivalentemente, quando um pode ser levado ao outro através de uma reflexão e uma rotação. Por fim, para estabelecer qual classe é positiva e qual é negativa, basta

escolher um bivector canônico para ser positivamente orientado. No plano, dada a base canônica, estabelecemos que o bivector positivamente orientado é o produto do primeiro vetor canônico pelo segundo. Essa escolha é bem natural, e vale ressaltar que ela *não* depende da chamada regra da mão direita. A regra da mão direita somente estabelece a representação gráfica (e geométrica) desse bivector. Uma outra escolha arbitrária relacionada a essa construção é uma escolha de notação algébrica, ou seja, se o produto desses vetores canônicos será representados por multiplicação à esquerda ou à direita pelo primeiro vetor canônico. Em geral a escolha de multiplicação à esquerda é adotada para seguir a ordem da escrita.

Essa discussão se aplica, até então, somente a retângulos, ou seja, a paralelogramos cujos lados são perpendiculares. Formalmente, a noção de ortogonalidade é introduzida na teoria de espaços vetoriais por um *produto escalar/interno*<sup>4</sup> uma forma bilinear simétrica positivo-definida<sup>5</sup>, e até então estávamos implicitamente usando esse conceito para decidir quando vetores são ortogonais. O produto interno de vetores  $v$  e  $v'$  pode ser denotado  $v \cdot v'$ . Do ponto de vista geométrico, o produto interno de dois vetores está relacionado com a projeção de um dos vetores sobre o outro. O valor do produto interno é o produto das normas dos vetores com o cosseno do ângulo entre eles. Dessa forma, o produto interno determina a noção de ângulo entre os vetores. Em particular, quando o ângulo entre os vetores é reto — isto é, um quarto de volta — os vetores são *perpendiculares* (ou ortogonais) e o produto interno deles é 0, enquanto que, quando o ângulo entre eles é 0 ou é igual a dois ângulos retos — meia volta —, os vetores são *paralelos* e o produto interno entre eles é o produto de suas normas (a menos de sinal). Sem um produto interno no espaço, a única relação que se pode estabelecer entre vetores é a de paralelismo, pois ela equivale a um vetor ser múltiplo escalar do outro.

Um espaço vetorial dotado de um produto interno é chamado *espaço com produto interno* ou, de modo mais simples, *espaço linear geométrico/ortogonal*. O produto interno, além de estabelecer a noção de ângulo entre vetores, estabelece também a noção de norma ou magnitude do vetor, e confere assim uma estrutura de *espaço normado* ao espaço ortogonal em questão, que por sua vez estabelece a topologia do espaço.

Com a noção de ortogonalidade definida, podemos considerar o produto de vetores com qualquer ângulo entre eles. Geometricamente, dois vetores não paralelos formam um paralelogramo. Da mesma forma que no caso dos retângulos, esse paralelogramo forma um bivector, um segmento de plano orientado, que é denominado o *produto externo* dos vetores, pois não é elemento do espaço dos vetores. O produto externo de vetores  $v$  e  $v'$  é denotado  $v \wedge v'$ . Assim como no caso do vetor, um bivector tem as propriedades de magnitude (área) e orientação. Isso implica que um paralelogramo não retângulo que tenha a mesma área e orientação de um retângulo orientado é o mesmo bivector que esse retângulo. Diferente do caso dos vetores, que por estarem restritos à reta devem ter sempre o mesmo formato, os bivectores podem ser representados em qualquer formato — por exemplo circulares — não somente como paralelogramos. De forma análoga, podemos considerar os paralelepípedos formados por três vetores, que chamamos de *trivector*, e assim por diante até no máximo a dimensão do espaço vetorial em consideração.

Consideremos novamente dois vetores não paralelos. A área do paralelogramo formado por eles é igual ao produto das normas dos vetores com o seno do ângulo entre eles, pois o seno do ângulo dá a componente do segundo vetor que é perpendicular ao primeiro vetor. Como bivectores com a mesma área e orientação são considerados iguais, somente a componente perpendicular do segundo vetor relativa ao primeiro vetor contribui para a formação do bivector. A componente paralela do segundo vetor relativa ao primeiro vetor, por outro lado, está relacionada ao produto interno dos vetores. De modo a ter ambas informações geométricas relacionadas ao produto de vetores, definimos o *produto*

4. Cf. [SEÇÃO 1.4](#) para uma discussão da diferença entre produto escalar e produto interno tanto num contexto histórico quanto em álgebras geométricas.

5. A construção de álgebra geométrica também é possível para formas simétricas não degeneradas, ou mesmo para as degeneradas, mas nesta introdução vamos nos ater ao caso mais geometricamente intuitivo.

(geométrico) entre os vetores dois vetores como a soma do produto interno deles com o produto externo deles. Para vetores  $v$  e  $v'$ , denota-se

$$(4) \quad vv' := v \cdot v' + v \wedge v'.$$

Aqui, a soma deve ser entendida como uma soma formal, pois o produto interno é um escalar, enquanto que o produto externo é um bivector. Essa construção indica que, para um produto entre vetores ter significado geométrico, ele não pode ser restrito ao espaço dos vetores, mas sim deve ser considerado na soma formal do espaço de todos objetos geométricos formados pelos vetores: escalares, vetores, bivectores, trivetores, etc.

**A álgebra geométrica  $\mathbb{A}(2)$  do plano  $\mathbb{R}^2$**

**A álgebra geométrica  $\mathbb{A}(3)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$**

**A álgebra geométrica  $\mathbb{A}(d)$  do espaço  $\mathbb{R}^d$**

## 1.2 Álgebra geométrica de um espaço geométrico

Embora na [SEÇÃO 1.1](#) tenhamos descrito a intuição por trás da álgebra geométrica de um espaço geométrico  $\mathbb{R}^d$  com o produto escalar canônico sendo positivo-definido, vamos agora definir a álgebra geométrica de um espaço geométrico qualquer; isto é, teremos um espaço vetorial  $V$  e um produto (geométrico) escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $V$ .

Como discutimos na [SEÇÃO 1.1](#), procuramos uma álgebra  $A$  na qual existam entre quaisquer vetores  $v, v' \in V$  o produto (geométrico)  $v \times v' \in A$ , que denotaremos  $vv'$  por simplicidade, e também o produto escalar/interno  $\langle v, v' \rangle \in \mathbb{R}$  e o produto externo  $v \wedge v'$ , de modo que valha a relação

$$(5) \quad vv' = \langle v, v' \rangle + v \wedge v'.$$

Podemos optar por começar com quaisquer dois desses produtos e definir o terceiro a partir dessa relação. A nossa escolha será começar com um espaço linear  $V$  e um produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $V$  (isto é, uma forma bilinear simétrica), pois essa estrutura é bem entendida e estudada matematicamente e uma forma bilinear simétrica é portanto uma boa maneira de imbutir geometria em um espaço linear. A partir disso, consideraremos então o produto geométrico como fundamental: ele será o produto (bilinear) da álgebra  $A$ . Devemos, no entanto, fazer com que o produto geométrico seja compatível com o produto escalar, de modo que a geometria da álgebra  $A$  seja compatível com a geometria do espaço vetorial  $V$  no qual ela está baseada.

Note que podemos relacionar os produtos geométrico e escalar diretamente, sem necessidade de um produto externo, pois o produto interno é simétrico e o produto externo é antissimétrico, portanto deve valer, equivalentemente à [FÓRMULA \(5\)](#), que, para todos vetores  $v, v' \in V$ ,

$$(6) \quad \langle v, v' \rangle = \frac{1}{2}(vv' + v'v).$$

Essa relação estabelece a compatibilidade de que necessitamos entre os produtos geométrico e escalar, e portanto a usaremos como axioma na nossa definição abstrata de álgebra geométrica. Apenas notemos antes disso que, pela bilinearidade dos produtos geométrico e escalar, e pela simetria do produto escalar, vale que, para todos  $v, v' \in V$ ,

$$v^2 + vv' + v'v + v'^2 = (v + v')^2 = \langle v + v', v + v' \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, v' \rangle + \langle v', v' \rangle.$$

Isso implica que (como a característica de  $\mathbb{R}$  é diferente de 2) a condição da [FÓRMULA \(6\)](#) é equivalente à condição de que, para todo vetor  $v \in V$ , vale

$$(7) \quad \langle v \rangle^2 = v^2$$

(ou seja,  $\langle v, v \rangle = vv = v \times v$ ). Sendo assim, qualquer uma das **FÓRMULAS (6) e (7)** poderia ser tomada como axiomática na definição abstrata da álgebra geométrica.

**Definição 1.1.** Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço geométrico sobre  $\mathbb{R}$ . Uma *álgebra geométrica* de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma álgebra associativa com unidade  $A = (A, +, \times, -, 0, 1)$  sobre  $\mathbb{R}$  gerada como álgebra por  $V$  e tal que, para todos vetores  $v, v' \in V$ ,

$$\langle v, v' \rangle = \frac{1}{2}(v \times v' + v' \times v).$$

Um elemento  $a \in A$  é denominado um *multivetor*.<sup>6</sup>

Note que, na **DEFINIÇÃO 1.1**, a condição de que o anticomutador é um escalar já está assumindo a identificação de  $\mathbb{R}$  e  $V$  com os subespaços lineares de  $A$  gerados por  $1 \in A$  e pela imagem de uma base de  $V$  pela inclusão. Por definição da álgebra geométrica, todo multivetor é uma soma finita de escalares e produtos de finitos vetores, isto é, um elemento

$$a \in \mathbb{R} + V + \dots V^d$$

para algum  $d \in \mathbb{N}$ . Mais precisamente, isso significa que, para todo multivetor  $a \in A$ , existem  $d \in \mathbb{N}$  (representando a dimensão máxima dos  $V^m$ ),  $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{N}$  (representando a quantidade de parcelas em cada espaço  $V^m$ ), um escalar  $c \in \mathbb{R}$  e, para cada  $0 \leq m < d$  e  $0 \leq s < p_m$ , vetores  $v_{s,0}^{(m)}, \dots, v_{s,p_m-1}^{(m)} \in V$  tais que

$$(8) \quad a = c + \bigoplus_{s=0}^{p_1-1} v_s^{(1)} + \bigoplus_{s=0}^{p_2-1} v_{s,0}^{(2)} v_{s,1}^{(2)} \dots + \bigoplus_{s=0}^{p_d-1} v_{s,0}^{(d-1)} \dots v_{s,d-1}^{(d-1)}.$$

Na álgebra geométrica, vetores ortogonais — isto é, vetores cujo produto escalar é 0 — são os vetores que anticomutam.

**Proposição 1.1.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . Para todos  $v, v' \in V$ ,  $\langle v, v' \rangle = 0$  se, e somente se  $v \times v' = -v' \times v$ .

*Demonstração.* Se  $\langle v, v' \rangle = 0$ , então

$$v \times v' = \frac{1}{2}(v \times v' + v' \times v) + \frac{1}{2}(v \times v' - v' \times v) = \frac{1}{2}(v \times v' - v' \times v) = -v' \times v.$$

Reciprocamente, se  $v \times v' = -v' \times v$ , então

$$\langle v, v' \rangle = \frac{1}{2}(v \times v' + v' \times v) = 0. \quad \blacksquare$$

Supondo que o produto escalar dado pelo anticomutador de vetores é positivo-definido, essa construção abstrata sempre gera a álgebra geométrica usual de  $\mathbb{R}^d$  quando  $d$  é par, mas quando  $d$  é ímpar sempre existem duas álgebras geométricas, a menos de isomorfismo: a usual, e uma outra álgebra de dimensão algébrica  $2^d - 1$ , na qual um  $d$ -vetor não está definido. Mesmo não existindo a unicidade com a **DEFINIÇÃO 1.1**, existe uma definição de álgebra geométrica universal que garante a unicidade, e nesse caso a álgebra geométrica universal de  $\mathbb{R}^d$  é a álgebra geométrica usual definida anteriormente. Sempre consideraremos a partir deste momento que a álgebra geométrica em consideração é álgebra geométrica universal.

6. Embora ele seja tecnicamente um vetor, por ser elemento do espaço linear  $A$ , vamos reservar neste contexto o termo “vetor” para elementos do subespaço  $V \subseteq A$  (cf. **SEÇÃO 1.2**).

## Escalares, vetores, bivectores e multivetores

Originalmente, o termo *vetor* era usado para designar segmentos de reta orientados no espaço tridimensional. Além disso, como o conjunto dos vetores (isto é, segmentos de reta orientados no espaço tridimensional) tem uma estrutura algébrica específica que permite soma de vetores e produto de escalar por vetor, qualquer conjunto com estrutura algébrica abstrata igual à do conjunto de vetores passou a ser designado um *espaço vetorial* (ou também *espaço linear*) e o termo *vetor* passou a designar qualquer elemento de um espaço vetorial. Porém, na descrição da álgebra geométrica, queremos retomar a noção geométrica original de um vetor. Sendo assim, para evitar confusão de nomenclatura, adotaremos o nome *espaço linear* para a estrutura algébrica abstrata e o termo *vetor* terá um significado mais restrito.

**Definição 1.2.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ .

1. Um *escalar* de  $A$  é um elemento de  $\mathbb{R} \subseteq A$ .
2. Um *vetor* de  $A$  é um elemento de  $V \subseteq A$ .
3. Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , um *multivetor homogêneo simples de grau  $m$*  (ou  *$m$ -vetor simples*) é um multivetor  $s \in A$  que é produto de  $m$  vetores anticomutantes; isto é, existem vetores  $v_0, \dots, v_{m-1} \in V$  tais que

$$s = v_0 \cdots v_{m-1}$$

e, para todos  $0 \leq l, l' < m$  com  $l \neq l'$ ,  $v_l v_{l'} = -v_{l'} v_l$ .

4. Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , um *multivetor homogêneo de grau  $m$*  (ou  *$m$ -vetor*) é um multivetor  $s \in A$  que é combinação linear de  $m$ -vetores simples. Um 2-vetor também é denominado um *bivetor*; um 3-vetor, *trivetor*; e um 4-vetor, *quadrivetor*.

Essa dimensão geométrica  $m$  de um multivetor simples gera uma gradação na álgebra  $A$ , pois ela é gerada pelos vetores de  $V$ . O conjunto de  $m$ -vetores é um subespaço linear da álgebra; em particular, o 0 é um  $m$ -vetor para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{N}$ . O *subespaço linear de multivetores de grau  $m$*  (ou  *$m$ -vetores*) de  $A$  é o subespaço linear  $\langle A \rangle_m$  de  $m$ -vetores de  $A$ . Denotamos o espaço linear  $\langle \mathbb{R}^d \rangle_m$  por  $\mathbb{R}^{\binom{d}{m}}$ .

Determinar a dimensão algébrica desses espaços é uma tarefa simples usando uma base do espaço  $\mathbb{R}^d$ , e também é simples mostrar que elas formam a álgebra geométrica como uma soma direta.

**Proposição 1.2.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma projeção linear canônica

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_m : A &\longrightarrow \langle A \rangle_m \\ a &\longmapsto \langle a \rangle_m. \end{aligned}$$

de modo que  $A$  é a soma direta

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \langle A \rangle_n$$

e, para todo  $a \in A \setminus \{0\}$ , existe único  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $\langle a \rangle_m \neq 0$  e

$$a = \bigoplus_{m=0}^d \langle a \rangle_m.$$

Se  $V$  tem dimensão finita, então

$$\dim \langle A \rangle_m = \binom{\dim V}{m} = \frac{(\dim V)!}{m!((\dim V) - m)!}.$$



A **PROPOSIÇÃO 1.2** justifica a seguinte definição, e também a notação  $\mathbb{R}^{(d)} = \langle \mathbb{R}^d \rangle_m$ .

**Definição 1.4.** Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ , e  $a \in A$ .

1. Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , a *parte  $m$ -vetorial* de  $a$  é o  $m$ -vetor

$$\langle a \rangle_m \in \langle A \rangle_m.$$

2. Se  $a \neq 0$ , o *grau* de  $a$  é o único  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $\langle a \rangle_m \neq 0$  e

$$(9) \quad a = \bigoplus_{m=0}^d \langle a \rangle_m.$$

Além da decomposição graduada da álgebra geométrica  $A$  nos subespaços de  $m$ -vetores, podemos também decompor a álgebra geométrica em dois subespaços, se agrupamos os multivetores entre os de grau par e grau ímpar.

**Definição 1.5.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ .

1. Para todo multivetor  $a \in A \setminus \{0\}$ , a *componente par* de  $a$  é o multivetor

$$\langle a \rangle_{[0]} := \bigoplus_{k=0}^{\lfloor |d|/2 \rfloor} \langle a \rangle_{2k}$$

A *componente par* de  $0 \in A$  é  $\langle 0 \rangle_{[0]} = 0$ .

2. Para todo multivetor  $a \in A \setminus \{0\}$ , a *componente ímpar* de  $a$  é o multivetor

$$\langle a \rangle_{[1]} := \bigoplus_{k=0}^{\lfloor (|d|-1)/2 \rfloor} \langle a \rangle_{2k+1}.$$

A *componente ímpar* de  $0 \in A$  é  $\langle 0 \rangle_{[1]} = 0$ .

A *sub-álgebra de multivetores de grau par* de  $A$  é o subespaço

$$A_0 = \{a \in A \mid a = \langle a \rangle_{[0]}\} = \{a \in A \mid \langle a \rangle_{[1]} = 0\}.$$

e o *subespaço de multivetores de grau ímpar* de  $A(d)$  é o subespaço

$$A_1 = \{a \in A \mid a = \langle a \rangle_{[1]}\} = \{a \in A \mid \langle a \rangle_{[0]} = 0\}.$$

Mostraremos mais à frente que  $A_0$  é de fato uma sub-álgebra de  $A$ .

**Proposição 1.3.** *Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . A componente par  $A_0$  é uma sub-álgebra de  $A$ .*

### 1.3 Involuções da álgebra geométrica

Lembremos que, para definirmos automorfismos ou antiautomorfismos em uma álgebra, basta definirmos seu valores nos vetores que geram a álgebra.

## Transposição

**Definição 1.6.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . A *transposição*<sup>7</sup> em  $A$  é o único antiautomorfismo

$$\begin{aligned}\dagger : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^\dagger\end{aligned}$$

que satisfaz, para todo vetor  $v \in V$ ,

$$v^\dagger = v.$$

A *transposta* de um multivetor  $a \in A$  é o multivetor  $a^\dagger$ .

O significado geométrico da transposição é o seguinte. A transposição preserva escalares e vetores. A transposição de um produto de vetores  $vv'$  inverte a ordem do produto por ser antiautomorfismo, portanto satisfaz

$$(vv')^\dagger = v'^\dagger v^\dagger = v'v.$$

Portanto, no caso de um bivector simples  $vv' \in \langle A \rangle_2$ , vale

$$(vv')^\dagger = v'v = -vv'.$$

Portanto podemos imaginar que o bivector simples  $vv'$  é refletido na diagonal do paralelepípedo que  $vv'$  representa, uma operação análoga à transposição de matrizes, em que os valores são refletidos na diagonal. No caso de um bivector, isso dá o inverso aditivo do bivector.

Em cada  $m$ -vetor simples  $v_0 \cdots v_{m-1} \in \langle A \rangle_m$  vale

$$v_0 \cdots v_{m-1}^\dagger = v_{m-1}^\dagger \cdots v_0^\dagger = v_{m-1} \cdots v_0 = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} v_0 \cdots v_{m-1}.$$

e isso se estende linearmente para qualquer  $a \in A$ :

$$a^\dagger = \sum_{m=0}^d (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \langle a \rangle_m = \langle a \rangle_0 + \langle a \rangle_1 - \langle a \rangle_2 - \langle a \rangle_3 + \cdots (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \langle a \rangle_d.$$

Note que a paridade de  $\frac{m(m-1)}{2}$  tem período 4 pois vale 1, 1, -1, -1 para  $m = 0, 1, 2, 3$  e, escrevendo  $m = 4k + s$ , segue que

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{(4k+s)(4k+s-1)}{2} = \frac{4^2k^2 + 4k(2s-1) + s(s-1)}{2} \equiv_2 \frac{s(s-1)}{2}.$$

Isso implica que a transposição é uma involução: para todo  $a \in A$ , vale

$$(a^\dagger)^\dagger = a.$$

## Inversão central

Note que denominamos as involuções  $-a$  por *inversão aditiva* e  $a^{-1}$  por *inversão multiplicativa*. A seguir definimos uma outra inversão, que coincide com a inversão aditiva em alguns casos.

7. Também é denominada *reversão* na literatura, pois reverte a ordem dos vetores em um produto por ser um antiautomorfismo.

**Definição 1.7.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . A *inversão central* (ou *reflexão pela origem*)<sup>8</sup> em  $A$  é o único automorfismo

$$\begin{aligned} * : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^* \end{aligned}$$

que satisfaz, para todo vetor  $v \in V$ ,

$$v^* = -v.$$

O significado geométrico da inversão central é o seguinte: ela preserva escalares e inverte aditivamente (inverte pela origem) os vetores. A inversão central de um bivector simples  $vv'$  inverte pela origem cada vetor, mantendo a ordem do produto por ser automorfismo, portanto satisfaz

$$(vv')^* = v^*v'^* = (-v)(-v') = vv'.$$

Portanto podemos imaginar que o bivector  $i_{h,h'}$  é refletido na diagonal do paralelepípedo que  $i_h i_{h'}$  representa, uma operação análoga à transposição de matrizes, em que os valores são refletidos na diagonal. No caso de um bivector, isso dá o próprio bivector.

Em cada  $m$ -vetor simples  $v_0 \cdots v_{m-1} \in \langle A \rangle_m$  vale

$$v_0 \cdots v_{m-1}^* = v_0^* \cdots v_{m-1}^* = (-v_0) \cdots (-v_{m-1}) = (-1)^m v_0 \cdots v_{m-1}$$

e isso se estende linearmente para qualquer  $a \in A$ :

$$a^* = \bigoplus_{m=0}^d (-1)^m \langle a \rangle_m = \langle a \rangle_0 - \langle a \rangle_1 + \langle a \rangle_2 - \langle a \rangle_3 + \cdots (-1)^d \langle a \rangle_d.$$

Isso implica que a inversão central é uma involução: para todo  $a \in A$ , vale

$$(a^*)^* = a.$$

A inversão central permite descrever as componentes par e ímpar da álgebra  $A$  da seguinte forma:

$$A_0 = \{a \in A \mid a^* = a\}$$

e

$$A_1 = \{a \in A \mid a^* = -a\}.$$

**Exercício 1.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . Para todo  $a \in A$ ,

1.  $\langle a \rangle_{[0]} = \frac{1}{2}(a + a^*).$
2.  $\langle a \rangle_{[1]} = \frac{1}{2}(a - a^*).$

Vamos agora classificar alguns vetores de acordo com um certo tipo de “quase-comutatividade” envolvendo a inversão central  $*$ .

**Proposição 1.4.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_1)$  e  $a \in \mathbb{A}(d)$ . Então  $a \in \mathbb{A}(0, d_0, 0)$  se, e somente se, para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$va = a^*v.$$

8. Também denominada *automorfismo principal* ou *involução de grau* na literatura.

*Demonstração.* Provaremos cada direção separadamente.

( $\Leftarrow$ ) Para cada multivetor canônico básico  $\epsilon_h = \epsilon_{h_0} \cdots \epsilon_{h_{m-1}} \in \mathbb{A}(0, d_0, 0)$ , vale que, para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$v \cdot \epsilon_{h_{m-1}} = 0,$$

portanto segue da **PROPOSIÇÃO 1.6** que

$$v\epsilon_h = (-1)^m \epsilon_h v + 2 \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l (v \cdot \epsilon_l) w_0 \cdots w_{l-1} w_{l+1} \cdots w_{m-1} = (-1)^m \epsilon_h v = (\epsilon_h)^* v.$$

Como isso vale para todo multivetor básico, segue que, para todo multivetor  $a \in \mathbb{A}(0, d_0, 0)$ ,

$$va = v \left( \sum_{0 \leq m \leq d_0} \sum_{h \in \binom{d_0}{m}} a_h \epsilon_h \right) = \sum_{0 \leq m \leq d_0} \sum_{h \in \binom{d_0}{m}} a_h v \epsilon_h = \sum_{0 \leq m \leq d_0} \sum_{h \in \binom{d_0}{m}} a_h (\epsilon_h)^* v = a^* v.$$

( $\Rightarrow$ ) Reciprocamente, seja  $a \in \mathbb{A}(d)$  e suponhamos, por absurdo, que  $a \notin \mathbb{A}(d)$ . Então existe alguma parcela de  $a$  que não envolve somente os vetores canônicos nulários, digamos  $e_l$  com  $0 \leq l < d_-$  ou  $d_- + d_0 \leq l < d$ . Podemos colocar o vetor canônico  $e_l$  em evidência na expressão de  $a$ ; ou seja existem  $a', a'' \in \mathbb{A}(d)$  tais que  $a'$  e  $a''$  não têm o fator  $e_l$  em nenhuma parcela e

$$a = a' + a'' e_l.$$

Para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ , deveria valer  $va = a^* v$ , portanto

$$va' + va'' e_l = v(a' + a'' e_l) = va = a^* v = (a' + a'' e_l)^* v = a'^* v + (a'' e_l)^* v = a'^* v - a''^* e_l v.$$

Tomando  $v = e_l$ , isso implicaria que

$$e_l a' + e_l a'' e_l = a'^* e_l - a''^* e_l e_l = a'^* e_l - a''^* (e_l)^2.$$

Mas, como  $a'$  e  $a''$  não têm nenhuma parcela com fator  $e_l$ , segue da **PROPOSIÇÃO 1.6** que  $e_l a' = a'^* e_l$  e  $e_l a'' = a''^* e_l$ , logo

$$a'^* e_l + a''^* (e_l)^2 = e_l a' + e_l a'' e_l = a'^* e_l - a''^* (e_l)^2.$$

Novamente por  $a'$  e  $a''$  não terem nenhuma parcela com fator  $e_l$ , segue que  $-a''^* (e_l)^2 = a''^* (e_l)^2$ , logo  $a''^* = 0$  ou  $e_l^2 = 0$ . Como assumimos que  $e_l$  não é vetor canônico nulário, ou seja,  $l \notin \{d_-, \dots, d_- + d_0 - 1\}$ , então  $e_l^2 \neq 0$ , portanto seguiria que  $a'' = 0$ . Isso é um absurdo pois implica que  $a$  não tem nenhuma parcela com fator  $e_l$ .

■

**Proposição 1.5.** Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ .

1. Para todo vetor nulário canônico  $\epsilon_l$  e todo multivetor  $a \in \mathbb{A}(d)$ ,  $\epsilon_l a = a^* \epsilon_l$ .
2.  $\mathbb{A}'_0(0, d_0, 0)$  está no centro de  $\mathbb{A}(d)$ .
3. Os elementos de  $\mathbb{A}'(0, d_0, 0)$  comutam com os de  $\mathbb{A}_0(d)$ .

## Conjugação

Podemos compor a transposição com a conjugação para obter uma nova transformação. A ordem da composição não importa pois, para todo  $v \in V$ ,

$$(v^\dagger)^* = v^* = -v = (-v)^\dagger = (v^*)^\dagger.$$

**Definição 1.8.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ . A *conjugação* em  $A$  é a composição da transposição com a inversão central, denotada

$$\begin{aligned} \ddagger : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^\ddagger := a^{\dagger*}. \end{aligned}$$

O *conjugado* de um multivetor  $a \in A$  é o multivetor  $a^\ddagger$ .

A conjugação é portanto o único antiautomorfismo que satisfaz, para todo  $v \in V$ ,

$$v^\ddagger = -v.$$

Em cada  $m$ -vetor simples  $v_0 \cdots v_{m-1} \in \langle A \rangle_m$  vale

$$v_0 \cdots v_{m-1}^\ddagger = v_0 \cdots v_{m-1}^{\dagger*} = (-1)^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} v_0 \cdots v_{m-1} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} v_0 \cdots v_{m-1}.$$

e isso se estende linearmente para qualquer  $a \in A$ :

$$a^\ddagger = \sum_{m=0}^d (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \langle a \rangle_m = \langle a \rangle_0 - \langle a \rangle_1 + \langle a \rangle_2 - \langle a \rangle_3 + \cdots (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} \langle a \rangle_d.$$

Note que a paridade de  $\frac{m(m+1)}{2}$  tem período 4 (e vale 1, -1, -1, 1 para  $m = 0, 1, 2, 3$ ), pois é produto de  $(-1)^m$ , que tem paridade de período 2, com  $\frac{m(m-1)}{2}$ , que tem paridade de período 4.

Isso implica que a conjugação é uma involução: para todo  $a \in A$ , vale

$$(a^\ddagger)^\ddagger = a.$$

## 1.4 Produtos da álgebra geométrica

### Qual a diferença entre produto escalar e produto interno?

Fora do contexto de álgebras geométrica/álgebras de Clifford, tanto “produto interno” como “produto escalar” são usados basicamente como sinônimos: ambos se referem a uma forma bilinear simétrica positivo-definida em um espaço vetorial. Esse significado pode variar um pouco conforme o contexto e um termo pode ser preferido ou preterido de acordo com a cultura matemática em questão. Por exemplo, em álgebra linear básica e geometria analítica o termo de costume é “produto escalar”, enquanto que em matemática avançada é mais usual se usar “produto interno”. Às vezes também se admite que a forma bilinear não seja positivo-definida, mas sim somente não-degenerada, ou até mesmo simplesmente simétrica. No entanto, esses termos têm origens diferentes, embora relacionadas entre si e também com os produtos “externo” e “vetorial”.

Os termos “produto escalar” e “produto vetorial” foram cunhados por Clifford<sup>9</sup> em 1878. A etimologia parece ser evidente, pois o produto escalar tem como resultado um escalar, enquanto que

9. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathword/v/>

o produto vetorial resulta em um vetor. Já os termos “produto interno” e “produto externo” (também traduzido para português como “produto exterior”) foram cunhados por Grassman<sup>10</sup> em 1844 e sua etimologia é mais questionável. Como o produto interno entre dois vetores é 0 precisamente quando eles são ortogonais, o OED sugere que o emprego de “interno” estaria relacionado ao fato de que o produto interno dá a parte de um vetor que é *interna* ao outro, ou seja, na direção do outro. No entanto, essa explicação não parece compatível com o significado de produto externo, e Schwartzman<sup>11</sup> sugere que os termos teriam sido escolhidos por Grassman simplesmente por serem antônimos, sem nenhum significado intrínseco.

Uma possível explicação dentro da perspectiva da álgebra geométrica que é mais compatível com o significado de produto externo seria que o produto interno entre dois vetores, que são elementos de *grau um* da álgebra, tem como resultado um escalar, que é um elemento de *grau menor* que o dos vetores, enquanto que o produto externo entre dois vetores é um bivector, que por sua vez tem *grau maior* que os vetores. Além disso, os produtos interno e externo também se relacionam com a interpretação dos objetos geométricos da álgebra através de projeções de subespaços e geração de superespaços.

No que segue, generalizaremos de duas formas distintas o produto escalar  $\langle v, v' \rangle$  entre vetores da álgebra geométrica. O produto escalar manterá o significado de uma forma bilinear simétrica, o que parece apropriado pelo seu valor ser sempre um escalar. Definiremos na SEÇÃO 1.4 uma forma bilinear simétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entre quaisquer multivetores da álgebra  $\mathbf{A}$  que coincide com a forma bilinear simétrica do espaço vetorial  $\mathbf{V}$  para vetores. Esse é o sentido preciso em que a geometria da álgebra geométrica é compatível com a geometria do espaço vetorial.

Por outro lado, os produtos interno e externo entre multivetores serão definidos na SEÇÃO 1.4 levando em consideração a propriedade de diminuir e aumentar, respectivamente, o grau dos objetos envolvidos no produto. Eles também serão definidos para todos multivetores da álgebra  $\mathbf{A}$ , e o produto interno ainda coincidirá com o produto escalar do espaço vetorial  $\mathbf{V}$  para vetores, mas não terá nenhuma relação necessária com o produto interno quando calculado em multivetores quaisquer da álgebra.

Por causa dessa divergência de generalização, teremos que adotar notações distintas para o produto escalar e o produto interno. Manteremos a notação  $\langle v, v' \rangle$  para o produto escalar, que já está bem estabelecida como uma notação em espaços lineares com formas bilineares simétricas, e adotaremos uma nova notação para o produto interno, que esteja relacionada com a notação de produto externo, e de modo que essas notações relembrem ou sugiram a relação com a ideia de diminuir e aumentar grau.

## Produtos interno e externo

O produto escalar (interno) de vetores  $v, v' \in V$  está relacionado com o produto geométrico pela FÓRMULA (6). Conforme foi explicado na SEÇÃO 1.4, vamos adotar uma nova notação para o produto interno, pois sua generalização para multivetores da álgebra divergirá da generalização do produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entre multivetores. Assim, para todos vetores  $v, v' \in V$ , definimos o *produto interno* entre os vetores  $v$  e  $v'$  como

$$(10) \quad v \cdot v' := \frac{1}{2}(vv' + v'v)$$

A expressão à direita costuma ser chamada de *anticomutador* de  $v$  e  $v'$  pois, quando vetores  $v$  e  $v'$  anticomutam, isto é,  $v'v = -vv'$ , ela é igual a 0, e quando eles comutam, ela é igual a  $vv'$ . Nesse sentido, o anticomutador mede quanto os vetores deixam de anticomutar.

10. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathword/i/>

11. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathword/i/>

De forma análoga, podemos considerar o *comutador* dos vetores  $v$  e  $v'$ , que mede quanto os vetores deixam de comutar. Definimos o *produto externo* de  $v$  por  $v'$  como

$$(11) \quad v \vee v' := \frac{1}{2}(vv' - v'v).$$

O fator  $\frac{1}{2}$  não é sempre adotado para o comutador/anticomutador, mas aqui ele é importante para que o resultado de cada um dos produtos seja igual ao produto geométrico no caso de vetores que anticomutam/comutam. Além disso, eles garantem que valha, para todos vetores  $v, v' \in V$ ,

$$(12) \quad vv' = v \cdot v' + v \vee v',$$

que recupera a **FÓRMULA (4)** que motivou a definição do produto geométrico da álgebra.

Essas operações têm significado geométrico. O produto interno é um escalar cujo valor é produto das normas de  $v$  e  $v'$  multiplicado pelo cosseno do ângulo entre  $v$  e  $v'$ , enquanto que o produto externo é o um bivector que representa o paralelogramo formado por  $v$  e  $v'$ , orientado conforme  $v$  e  $v'$ , cuja norma é o produto das normas de  $v$  e  $v'$  multiplicado pelo seno do ângulo entre  $v$  e  $v'$ .

Podemos estender as definições de produto interno e externo para quaisquer elementos da álgebra  $A$ , de modo a ainda manter esse significado geométrico. Para isso, inicialmente definimos os produtos interno e externo de um vetor por um multivetor. Lembremos que a inversão central de um multivetor  $a \in A$  é dada por

$$a^* = \sum_{m=0}^d (-1)^m \langle a \rangle_m = \langle a \rangle_0 - \langle a \rangle_1 + \langle a \rangle_2 - \langle a \rangle_3 + \cdots (-1)^d \langle a \rangle_d.$$

**Definição 1.9.** Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$  um vetor e  $a \in A$  um multivetor.

1. O *produto interno* de  $v$  por  $a$  é

$$v \cdot a := \frac{1}{2}(va - a^*v).$$

e o *produto interno* de  $a$  por  $v$  é

$$a \cdot v := \frac{1}{2}(av - va^*).$$

2. O *produto externo* de  $v$  por  $a$  é

$$v \vee a := \frac{1}{2}(va + a^*v)$$

e o *produto externo* de  $a$  por  $v$  é

$$a \vee v := \frac{1}{2}(av + va^*).$$

Com essas definições mais gerais, temos que, para todo vetor  $v \in V$  e todo multivetor  $a \in A$ ,

$$(13) \quad \begin{aligned} va &= v \cdot a + v \vee a \\ av &= a \cdot v + a \vee v, \end{aligned}$$

o que generaliza a **FÓRMULA (12)**. Em particular, se  $a$  é um  $m$ -vetor, valem

$$\begin{aligned} v \cdot a &= \frac{1}{2}(va - (-1)^m av) \\ a \cdot v &= \frac{1}{2}(av - (-1)^m va) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v \vee a &= \frac{1}{2}(va + (-1)^m av) \\ a \vee v &= \frac{1}{2}(av + (-1)^m va), \end{aligned}$$

o que mostra que as definições coincidem com as **FÓRMULAS (10) e (11)** quando  $a$  é um vetor. Vamos provar agora alguns resultados técnicos sobre produto interno e externo para então obtermos a **PROPOSIÇÃO 1.8**.

**Proposição 1.6.** *Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $v, w_0, \dots, w_{m-1} \in V$  vetores e  $a := w_0 \cdots w_{m-1}$ . Então*

$$\begin{aligned} v \cdot a &= \frac{1}{2}(va - a^*v) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} (-1)^k (v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1}, \\ a \cdot v &= \frac{1}{2}(av - va^*) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} (-1)^k (w_k \cdot v) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Vamos somente demonstrar a proposição para  $v \cdot a$ , pois para  $a \cdot v$  é análogo. Vamos usar indução em  $m$ . (Caso zero) Para  $m = 0$ , a proposição vale por vacuidade pois  $\frac{1}{2}(v - v) = 0$ . (Caso sucessor) Suponhamos agora que a proposição vale para algum  $m \in \mathbb{N}$  e mostremos que então vale para  $m + 1$ . Nesse caso, como pela definição do produto geométrico (**FÓRMULA (10)**) vale

$$vw_m = 2v \cdot w_m - w_m v,$$

segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} vw_0 \cdots w_m &= \left( 2 \bigoplus_{k=0}^{m-1} (-1)^k (v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1} + (-1)^m w_0 \cdots w_{m-1} v \right) w_m \\ &= 2 \bigoplus_{k=0}^{m-1} (-1)^k (v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1} w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_{m-1} vw_m \\ &= 2 \bigoplus_{k=0}^{m-1} (-1)^k (v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1} w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_{m-1} (2v \cdot w_m - w_m v) \\ &= 2 \bigoplus_{k=0}^m (-1)^k (v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_m + (-1)^{m+1} w_0 \cdots w_m v, \end{aligned}$$

o que prova o caso sucessor. ■

Na proposição seguinte consideramos o conjunto (grupo)  $\tilde{\mathfrak{S}}(m)$  das bijeções (permutações) de  $\llbracket m \rrbracket$  e o sinal de paridade  $(-1)^\sigma$  de uma bijeção  $\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m)$ .

**Proposição 1.7.** *Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $v, w_0, \dots, w_{m-1} \in V$  vetores e  $a := w_0 \vee \cdots \vee w_{m-1}$ . Então*

$$\begin{aligned} v \vee a &= \frac{1}{2}(va + a^*v) = \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{l=0}^m \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m)} (-1)^\sigma w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(l-1)} v w_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m-1)}, \\ a \vee v &= \frac{1}{2}(av + va^*) = \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{l=0}^m \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m)} (-1)^\sigma w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(l-1)} v w_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m-1)}. \end{aligned}$$



*Demonstração.* Vamos somente demonstrar a proposição para  $v \vee a$ , pois para  $a \vee v$  é análogo. Vamos usar indução em  $m$ . (Caso zero) Para  $m = 0$ , a proposição vale por vacuidade pois  $\frac{1}{1!}v = v$ . (Caso sucessor) Suponhamos agora que a proposição vale para algum  $m \in \mathbb{N}$  e mostremos que então vale para  $m + 1$ . Vamos primeiro assumir que  $w_0, \dots, w_m \in V$  são anticomutantes dois a dois. Então vale  $a = w_0 \vee \dots \vee w_m = w_0 \cdots w_m$ . Definindo

$$S := \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m+1)} (-1)^\sigma v w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(m-1)} = v w_0 \cdots w_m$$

e, para cada  $k \in \llbracket m+1 \rrbracket$ , o conjunto  $\Sigma_k := \{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m+1) \mid \sigma(0) = k\}$  e

$$T_k := \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{l=1}^{m+1} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} (-1)^\sigma w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(l-1)} v w_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m)},$$

temos

$$\frac{1}{m+2} (S + \bigoplus_{k=0}^m T_k) = \frac{1}{(m+2)!} \bigoplus_{l=0}^{m+1} \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m+1)} (-1)^\sigma w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(l-1)} v w_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m)}.$$

Devemos mostrar que

$$v \vee a = \frac{1}{m+2} (S + \bigoplus_{k=0}^m T_k).$$

Vamos analisar cada termo do somatório separadamente. Primeiro note que, como os vetores  $w_0, \dots, w_m$  são anticomutantes, vale  $w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(m)} = w_0 \cdots w_m$ , logo

$$S = \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m+1)} (-1)^\sigma v w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(m)} = \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m+1)} v w_0 \cdots w_m = v w_0 \cdots w_m.$$

Agora consideremos  $k \in \llbracket m+1 \rrbracket$ . Restringindo domínio e contradomínio, o conjunto  $\Sigma_k$  das permutações  $\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}(m+1)$  tais que  $\sigma(0) = k$  pode ser identificado com o conjunto  $\Sigma'_k$  das bijeções  $\sigma' : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, k-1, k+1, \dots, m\}$ , portanto essas permutações de  $\Sigma_k$  são isomorfas às permutações de  $\tilde{\mathfrak{S}}(m)$ . Além disso, o sinal de uma tal  $\sigma \in \Sigma$  é  $(-1)^\sigma = (-1)^{k-1}(-1)^{\sigma'}$ , pois  $k$  é movido  $k-1$  para a posição inicial. Assim, segue da hipótese de indução para o produto externo de  $v$  por  $w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(k-1)} w_{\sigma(k+1)} \cdots w_{\sigma(m)}$  que

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{l=1}^{m+1} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} (-1)^\sigma w_k w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(l-1)} v w_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m)} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} w_k \bigoplus_{l=1}^{m+1} \bigoplus_{\sigma' \in \Sigma'_k} (-1)^{k-1} (-1)^{\sigma'} w_{\sigma'(1)} \cdots w_{\sigma'(l-1)} v w_{\sigma'(l)} \cdots w_{\sigma'(m)} \\ &= w_k (-1)^{k-1} v \vee (w_0 \vee \cdots \vee w_{k-1} \vee w_{k+1} \vee \cdots \vee w_m), \end{aligned}$$

então de  $\frac{1}{2}w_k v = v \cdot w_k - \frac{1}{2}vw_k$  (**FÓRMULA (10)**) segue que

$$\begin{aligned}
T_k &= w_k(-1)^{k-1}v \vee (w_1 \vee \cdots \vee w_{k-1} \vee w_{k+1} \vee \cdots \vee w_m) \\
&= w_k(-1)^{k-1}\frac{1}{2}(vw_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m - (-1)^m w_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m v) \\
&= \frac{1}{2}((-1)^{k-1}w_k vw_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m - (-1)^m w_0 \cdots w_m v) \\
&= \frac{1}{2}(-1)^k vw_k w_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m + (-1)^{k-1}(v \cdot w_k)w_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m - \frac{1}{2}(-1)^m w_0 \cdots w_m v \\
&= \frac{1}{2}(vw_0 \cdots w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_m v) + (-1)^{k-1}(v \cdot w_k)w_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m.
\end{aligned}$$

Somando os termos  $S$  e  $T_k$  e usando **PROPOSIÇÃO 1.6**, obtemos

$$\begin{aligned}
S + \bigoplus_{k=0}^m T_k &= vw_0 \cdots w_m + \\
&+ \bigoplus_{k=0}^m \left( \frac{1}{2}(vw_0 \cdots w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_m v) + (-1)^{k-1}(v \cdot w_k)w_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m \right) \\
&= vw_0 \cdots w_m + \\
&+ \frac{m+1}{2}(vw_0 \cdots w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_m v) - \bigoplus_{k=0}^m (-1)^k (v \cdot w_k)w_0 \cdots w_{k-1}w_{k+1} \cdots w_m \\
&= vw_0 \cdots w_m + \frac{m+1}{2}(vw_0 \cdots w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_m v) - \frac{1}{2}(vw_0 \cdots w_m - (-1)^m w_0 \cdots w_m v) \\
&= \frac{m+2}{2}(vw_0 \cdots w_m + (-1)^m w_0 \cdots w_m v) \\
&= (m+2)v \vee a,
\end{aligned}$$

portanto concluímos que

$$v \vee a = \frac{1}{m+2}(S + \bigoplus_{k=0}^m T_k) = \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{l=0}^m \bigoplus_{\sigma \in \vec{\mathfrak{S}}(m+1)} (-1)^\sigma w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(l-1)} vw_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m)}.$$

Finalmente, no caso em que  $w_0, \dots, w_m$  não são anticomutantes, escolhemos vetores anticomutantes  $w'_0, \dots, w'_m \in V$  tais que

$$w_0 \vee \cdots \vee w_m = w'_0 \cdots w'_m.$$

Então  $v \vee w_0 \vee \cdots \vee w_m = \pm v \vee w'_0 \vee \cdots \vee w'_m$  e o resultado segue do caso anterior. ■

**Proposição 1.8.** *Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $v \in V$  um vetor e  $a \in \langle A \rangle_m$  um  $m$ -vetor. Então  $v \cdot a$  e  $a \cdot v$  são  $(m-1)$ -vetores e satisfazem*

$$v \cdot a = \langle va \rangle_{m-1},$$

$$a \cdot v = \langle av \rangle_{m-1},$$

$v \vee a$  e  $a \vee v$  são  $(m+1)$ -vetores e satisfazem

$$v \vee a = \langle va \rangle_{m+1},$$

$$a \vee v = \langle av \rangle_{m+1},$$

e vale

$$va = v \cdot a + v \vee a = \langle va \rangle_{m-1} + \langle va \rangle_{m+1},$$

$$av = a \cdot v + a \vee v = \langle av \rangle_{m-1} + \langle av \rangle_{m+1}.$$

*Demonstração.* Vamos somente demonstrar a proposição para  $v \cdot a$ ,  $v \vee a$  e  $va$ , pois para  $a \cdot v$ ,  $a \vee v$  e  $av$  é análogo. Consideremos primeiro que  $a$  é um  $m$ -vetor simples e sejam  $w_0, \dots, w_{m-1} \in V$  vetores anticomutantes tais que  $a = w_0 \cdots w_{m-1}$ . Segue então da **PROPOSIÇÃO 1.6** que

$$v \cdot a = \bigoplus_{k=0}^{m-1} (-1)^k (v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1}.$$

Mas cada termo  $(v \cdot w_k) w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1}$  tem grau  $m-1$ , pois  $v \cdot w_k \in \mathbb{R}$  e  $w_0 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_{m-1}$  tem grau  $m-1$ , portanto concluímos que  $v \cdot a$  tem grau  $m-1$ . Agora, no caso em que  $a$  é um  $m$ -vetor qualquer, ele é uma soma de  $m$ -vetores simples, portanto segue por linearidade que  $v \cdot a = \frac{1}{2}(va - a^*v)$  é um multivetor de grau  $m-1$ .

Consideremos primeiro que  $a$  é um  $m$ -vetor simples e sejam  $w_0, \dots, w_{m-1} \in V$  vetores anticomutantes tais que  $a = w_0 \cdots w_{m-1}$ . Segue da **PROPOSIÇÃO 1.7** que

$$v \vee a = \frac{1}{2}(va + a^*v) = \frac{1}{(m+1)!} \bigoplus_{l=0}^m \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\mathcal{S}}(m)} (-1)^\sigma w_{\sigma(0)} \cdots w_{\sigma(l-1)} v w_{\sigma(l)} \cdots w_{\sigma(m-1)}.$$

■

Assim, o produto interno por um vetor diminui em 1 o grau de um  $m$ -vetor, enquanto que o produto externo aumenta em 1 o grau do  $m$ -vetor. Esse comportamento que vai nos permitir generalizar o produto interno e externo para quaisquer elementos da álgebra. Com a **PROPOSIÇÃO 1.8** podemos obter um resultado muito importante sobre a estrutura do produto geométrico entre multivetores simples. Lembremos que, para naturais  $m, m' \in \mathbb{N}$ , denotamos seu mínimo por  $m \wedge m'$  e seu máximo por  $m \vee m'$ . Note que  $|m' - m| = m \vee m' - m \wedge m'$  e  $m + m' = m \vee m' + m \wedge m'$ , portanto  $m + m' - |m' - m| = 2(m \wedge m')$ .

A próxima proposição mostra que o produto  $aa'$  entre multivetores homogêneos tem termos de menor grau  $|m' - m|$ , maior grau  $m + m'$ , e todos os termos intermediários aumentam de grau de 2 em 2.

**Proposição 1.9.** *Sejam  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \langle A \rangle_m$  um  $m$ -vetor e  $a' \in \langle A \rangle_{m'}$  um  $m'$ -vetor. Então*

$$aa' = \bigoplus_{k=0}^{m \wedge m'} \langle aa' \rangle_{|m'-m|+2k} = \langle aa' \rangle_{|m'-m|} + \langle aa' \rangle_{|m'-m|+2} + \cdots + \langle aa' \rangle_{m+m'}.$$

*Demonstração.* Consideremos primeiro o caso  $m \leq m'$ . Vamos fazer indução em  $m$ . (Caso zero) Para  $m = 0$  vale que  $a \in \mathbb{R}$ , logo  $aa'$  é um  $m'$ -vetor e então

$$aa' = \langle aa' \rangle_{m'} = \bigoplus_{k=0}^{0 \wedge m'} \langle aa' \rangle_{|m'-0|+2k}.$$

(Caso sucessor) Assumamos que vale para  $m$  e provemos para  $m+1$ . Vamos primeiro assumir que  $a$  é simples. Como  $a$  é um  $(m+1)$ -vetor simples, existem um vetor  $v \in V$  e um  $m$ -vetor simples  $b \in \langle A \rangle_m$  tais que  $a = vb$ . Como  $b$  é  $m$ -vetor simples, pela hipótese indutiva segue que

$$ba' = \bigoplus_{k=0}^{m \wedge m'} \langle ba' \rangle_{|m'-m|+2k};$$

como  $m + 1 \leq m'$ , então  $m \wedge m' = m$  e  $|m - m'| = m' - m$ , portanto segue que

$$aa' = vba' = v \bigoplus_{k=0}^{m \wedge m'} \langle ba' \rangle_{|m'-m|+2k} = \bigoplus_{k=0}^m v \langle ba' \rangle_{m'-m+2k}.$$

Da **PROPOSIÇÃO 1.8** segue que

$$v \langle ba' \rangle_{m'-m+2k} = v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-m+2k} + v \vee \langle ba' \rangle_{m'-m+2k},$$

portanto

$$\begin{aligned} aa' &= \bigoplus_{k=0}^m v \langle ba' \rangle_{m'-m+2k} \\ &= \bigoplus_{k=0}^m (v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-m+2k} + v \vee \langle ba' \rangle_{m'-m+2k}) \\ &= v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-m} + \bigoplus_{k=1}^m v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-m+2k-1} + \bigoplus_{k=0}^{m-1} v \vee \langle ba' \rangle_{m'-m+2k+1} + v \vee \langle ba' \rangle_{m'-m+2m} \\ &= v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-m} + \bigoplus_{k=1}^m (v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-(m+1)+2k} + v \vee \langle ba' \rangle_{m'-(m+1)+2k}) + v \vee \langle ba' \rangle_{m'+m} \end{aligned}$$

Pela unicidade da expansão de  $aa'$  nas termos de cada grau (**PROPOSIÇÃO 1.2**), e como o produto interno por vetor diminui o grau em 1 e o produto externo aumenta em 1 (**PROPOSIÇÃO 1.8**), devemos ter

$$\begin{aligned} \langle aa' \rangle_{m'-(m+1)} &= v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-m} \\ \langle aa' \rangle_{m'-(m+1)+2k} &= v \cdot \langle ba' \rangle_{m'-(m+1)+2k} + v \vee \langle ba' \rangle_{m'-(m+1)+2k} \\ \langle aa' \rangle_{m'+m} &= v \vee \langle ba' \rangle_{m'+m}. \end{aligned}$$

Assim concluímos que em  $aa'$  só ocorrem os termos de graus  $|m' - (m + 1)| = m' - (m + 1)$ ,  $m' - (m + 1) + 2, \dots, m' + (m + 1)$ , o que mostra que

$$aa' = \bigoplus_{k=0}^{(m+1) \wedge m'} \langle aa' \rangle_{|m'-(m+1)|+2k} = \langle aa' \rangle_{|m'-(m+1)|} + \langle aa' \rangle_{|m'-(m+1)|+2} + \dots + \langle aa' \rangle_{(m+1)+m'}.$$

Isso conclui a demonstração por indução em  $m$  para  $m$ -vetores simples  $a$ . Como um  $m$ -vetor  $a$  qualquer é uma soma de  $m$ -vetores simples, segue por linearidade que o resultado vale para qualquer  $m$ -vetor. O caso  $m \geq m'$  é análogo, mas usando os produtos interno e externo por vetores pela direita em vez de pela esquerda. ■

A **PROPOSIÇÃO 1.9** é de fato uma generalização da **PROPOSIÇÃO 1.8**.

**Definição 1.10.** Seja  $A$  a álgebra geométrica de um espaço geométrico  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sobre  $\mathbb{R}$ .

1. O *produto interno* de multivetores  $a, a' \in A$  é

$$a \cdot a' = \bigoplus_{m=1}^d \bigoplus_{m'=1}^{d'} \langle \langle a \rangle_m \langle a' \rangle_{m'} \rangle_{|m'-m|}$$

2. O *produto externo* de multivetores  $a, a' \in A$  é

$$a \vee a' = \bigoplus_{m=0}^d \bigoplus_{m'=0}^{d'} \langle \langle a \rangle_m \langle a' \rangle_{m'} \rangle_{m+m'}.$$

### Produto escalar e norma quadrática da álgebra geométrica

Lembremos que temos um produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_-, d_0, d_+}$  e que a forma quadrática associada a esse produto escalar é denotada

$$\langle v \rangle^2 = \langle v, v \rangle.$$

A notação ressalta que a forma quadrática não é necessariamente positiva e igual a  $|\cdot|^2$ , o quadrado da norma, portanto nem sempre existe um número real  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c^2 = \langle v \rangle^2$ . O expoente portanto deve ser interpretado como parte da notação, e não como a operação de elevar a 2. Ele indica somente que se trata de uma forma quadrática, portanto vale, para todo escalar  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\langle cv \rangle^2 = c^2 \langle v \rangle^2$ .

Queremos definir um produto interno e uma forma quadrática na álgebra  $\mathbb{A}(d)$ . Para isso, primeiro notemos que se  $a \in \mathbb{A}(d)$  é um produto de vetores  $a = v_0 \cdots v_{m-1}$ , então

$$aa^\dagger = v_0 \cdots v_{m-1} v_{m-1} \cdots v_0 = \langle v_0 \rangle^2 \cdots \langle v_{m-1} \rangle^2 = a^\dagger a \in \mathbb{R}.$$

No caso geral,  $aa^\dagger$  não é necessariamente um escalar, mas sempre podemos tomar a parte escalar. Baseado nisso, podemos definir um produto escalar e uma forma quadrática na álgebra geométrica.

**Definição 1.11.** Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . O produto escalar de multivetores  $a, a' \in \mathbb{A}(d)$  é o escalar

$$\langle a, a' \rangle := \frac{1}{2} \langle aa'^\dagger + a'a^\dagger \rangle_0.$$

A norma quadrática de um multivetor  $a \in \mathbb{A}(d)$  é o escalar

$$\langle a \rangle^2 := \langle aa^\dagger \rangle_0.$$

É importante ressaltar a forma quadrática e o produto escalar de multivetores não são necessariamente positivo-definidos, nem mesmo não degenerados, mas se o forem no espaço vetorial  $\mathbb{R}^d$  também serão na álgebra.

**Proposição 1.10.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . O produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{A}(d)$  é um produto escalar no espaço linear  $\mathbb{A}(d)$  e a forma quadrática  $\langle \cdot \rangle^2$  é sua forma quadrática associada.

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é bilinear. Para todos  $c \in \mathbb{R}$  e  $a, a' \in \mathbb{A}(d)$ ,

$$\begin{aligned} \langle a, ca' + a'' \rangle &= \frac{1}{2} \langle a(ca' + a'')^\dagger + (ca' + a'')a^\dagger \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} \langle a(ca' + a'')^\dagger \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle (ca' + a'')a^\dagger \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} c \langle aa'^\dagger \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle aa''^\dagger \rangle_0 + \frac{1}{2} c \langle a'a^\dagger \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle a''a^\dagger \rangle_0 \\ &= c \langle a, a' \rangle + \langle a, a'' \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é simétrico por definição, segue que é bilinear e portanto um produto escalar.

Finalmente, notemos que, para todos multivetores  $a, a' \in \mathbb{A}(d)$ , segue da linearidade da transposta  $^\dagger$ , da bilinearidade do produto geométrico e da linearidade do traço  $\langle \cdot \rangle_0$  que

$$\begin{aligned} 2\langle a, a' \rangle &= \langle aa'^\dagger + a'a^\dagger \rangle_0 \\ &= \langle aa'^\dagger \rangle_0 + \langle a'a^\dagger \rangle_0 \\ &= \langle aa^\dagger \rangle_0 + \langle aa'^\dagger \rangle_0 + \langle a'a^\dagger \rangle_0 + \langle a'a'^\dagger \rangle_0 - \langle aa^\dagger \rangle_0 - \langle a'a'^\dagger \rangle_0 \\ &= \langle (a + a')(a + a')^\dagger \rangle_0 - \langle aa^\dagger \rangle_0 - \langle a'a'^\dagger \rangle_0 \\ &= \langle a + a' \rangle^2 - \langle a \rangle^2 - \langle a' \rangle^2. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $\langle \cdot \rangle^2$  é a forma quadrática associada a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . ■

Ressaltamos então o resultado já comentado anteriormente sobre a forma quadrática de um produto de vetores.

**Proposição 1.11.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Sejam  $v_0, \dots, v_{m-1} \in \mathbb{R}^d$  vetores e  $r := v_0 \cdots v_{m-1} \in \mathbb{A}(d)$  o produto desses vetores. Então*

$$\langle r \rangle^2 = rr^\dagger = r^\dagger r = \langle v_0 \rangle^2 \cdots \langle v_{m-1} \rangle^2 \in \mathbb{R}.$$

**Pergunta 1.** Para quais multivetores a forma quadrática é multiplicativa?

### Inversa multiplicativa

**Definição 1.12.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . O grupo multiplicativo de  $\mathbb{A}(d)$  é o grupo  $\mathbb{A}'(d)$  de todos os elementos invertíveis de  $\mathbb{A}(d)$  com relação ao produto geométrico. O grupo multiplicativo par de  $\mathbb{A}(d)$  é o grupo  $\mathbb{A}'_0(d) := \mathbb{A}'(d) \cap \mathbb{A}_0(d)$ .*

Claramente, todo escalar invertível (isto é, um elemento de  $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) é um multivetor invertível.

**Proposição 1.12.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . O grupo multiplicativo  $\mathbb{R}'$  dos escalares está contido em  $\mathbb{A}'(d)$ .*

A inversa multiplicativa de um elemento  $a \in \mathbb{A}(d)$  nem sempre existe. Por exemplo, o multivetor  $1 + i_0 \in \mathbb{A}(1)$  não tem inversa, pois, como  $i_0^2 = 1$ , segue que, para todo  $a \in \mathbb{A}(1)$  escrito como  $a = x + yi_0$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$(1 + i_0)a = (1 + i_0)(x + yi_0) = (x + yi_0) + (x + yi_0)i_0 = (x + y)(1 + i_0),$$

o que impede que esse produto seja 1 independente do  $a$ .

Para determinar uma classe de multivetores invertíveis, primeiro classificamos os vetores invertíveis. Lembremos que um multivetor nulário é um multivetor  $a \in \mathbb{A}(d)$  tal que  $\langle a \rangle^2 = 0$  e um multivetor unitário é um multivetor  $a \in \mathbb{A}(d)$  tal que  $\langle a \rangle^2 = \pm 1$ .

**Proposição 1.13** (Vetores invertíveis são os vetores não nulários). *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $v \in \mathbb{R}^d$  um vetor. Então  $v \in \mathbb{A}'(d)$  se, e somente se,  $\langle v \rangle^2 \neq 0$ . Se  $v$  é invertível, então*

$$v^{-1} = \frac{v}{\langle v \rangle^2}.$$

*Demonstração.* Se  $\langle v \rangle^2 \neq 0$ , então  $v^{-1} = \frac{v}{\langle v \rangle^2}$ , pois

$$v^{-1}v = \frac{v}{\langle v \rangle^2}v = \frac{\langle v \rangle^2}{\langle v \rangle^2} = 1 = \frac{\langle v \rangle^2}{\langle v \rangle^2} = v \frac{v}{\langle v \rangle^2} = vv^{-1}.$$

Se  $\langle v \rangle^2 = 0$ , suponha por absurdo que  $v \in \mathbb{A}'(d)$ . Então valeria  $1 = vv^{-1}$ , logo

$$v = vv^{-1} = \langle v \rangle^2 v^{-1} = 0. \quad \blacksquare$$

Agora, para multivetores que são um produto de vetores invertíveis, a inversa sempre existe.

**Proposição 1.14.** *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $v_0, \dots, v_{m-1} \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{A}'(d)$  vetores invertíveis. Então  $r := v_0 \cdots v_{m-1} \in \mathbb{A}'(d)$  é invertível e*

$$r^{-1} = v_{m-1}^{-1} \cdots v_0^{-1} = \frac{r^\dagger}{\langle r \rangle^2}.$$

*Se  $r$  é unitário, então  $r^{-1} = \langle r \rangle^2 r^\dagger = \pm r^\dagger$ .*

*Demonstração.* Da **PROPOSIÇÃO 1.11** vale

$$\langle r \rangle^2 = rr^\dagger = \langle v_{m-1} \rangle^2 \cdots \langle v_0 \rangle^2 \in \mathbb{R}.$$

Como os vetores  $v_h$  são invertíveis, segue da **PROPOSIÇÃO 1.13** que  $\langle v_h \rangle^2 \neq 0$  e  $v_h^{-1} = \frac{v_h}{\langle v_h \rangle^2}$ , portanto  $\langle r \rangle^2 \neq 0$  e

$$r^{-1} = v_{m-1}^{-1} \cdots v_0^{-1} = \frac{v_{m-1}}{\langle v_{m-1} \rangle^2} \cdots \frac{v_0}{\langle v_0 \rangle^2} = \frac{r^\dagger}{\langle r \rangle^2}.$$

Se  $\langle r \rangle^2 = \pm 1$ , então  $r^{-1} = (\langle r \rangle^2)^{-1} r^\dagger = \langle r \rangle^2 r^\dagger = \pm r^\dagger$ . ■

Em geral, existem multivetores invertíveis que não são um produto de vetores, mas determinar todos esses elementos não é trivial<sup>12</sup>.

**Proposição 1.15** (Multivector invertível gerado por nulários canônicos). *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $a = \bigoplus_{m=0}^d \bigoplus_{h \in \binom{d_0}{m}} a_h \epsilon_h \in \mathbb{A}(0, d_0, 0)$  um multivector gerado por vetores canônicos nulários  $\epsilon_i$ . Se  $a \in \mathbb{A}'(d)$ , então  $\langle a \rangle_0 \neq 0$ .*

*Demonstração.* Se  $\langle a \rangle_0 = 0$ , é fácil notar que o produto de  $a$  com qualquer multivector  $a' \in \mathbb{A}(d)$  não tem parte escalar, portanto  $a$  não pode ter inversa. ■

Valem as seguintes relações entre a inversa multiplicativa e as involuções da álgebra, que estabelecem que o grupo multiplicativo de  $\mathbb{A}(d)$  é fechado pelas involuções.

**Proposição 1.16.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . As involuções transposição, inversão central, conjugação e inversão aditiva preservam  $\mathbb{A}'(d)$ . Explicitamente,*

1. Para todo  $a \in \mathbb{A}'(d)$ , vale  $a^\dagger \in \mathbb{A}'(d)$  e

$$(a^\dagger)^{-1} = (a^{-1})^\dagger.$$

2. Para todo  $a \in \mathbb{A}'(d)$ , vale  $a^* \in \mathbb{A}'(d)$  e

$$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*.$$

3. Para todo  $a \in \mathbb{A}'(d)$ , vale  $a^\ddagger \in \mathbb{A}'(d)$  e

$$(a^\ddagger)^{-1} = (a^{-1})^\ddagger.$$

4. Para todo  $a \in \mathbb{A}'(d)$ , vale  $-a \in \mathbb{A}'(d)$  e

$$(-a)^{-1} = -a^{-1}.$$

*Demonstração.* 1. Como  $\dagger$  é antiautomorfismo,

$$a^\dagger (a^{-1})^\dagger = (a^{-1} a)^\dagger = 1^\dagger = 1.$$

2. Como  $*$  é automorfismo,

$$a^* (a^{-1})^* = (a a^{-1})^* = 1^* = 1.$$

12. <https://math.stackexchange.com/questions/3154032/how-to-compute-if-a-multivector-inverse-exists-in-clifford-algebra>

3. Como  $\ddagger$  é composição de  $\dagger$  e  $*$ ,

$$(a^{-1})^{\ddagger} = (a^{-1})^{\dagger*} = ((a^{\dagger})^{-1})^* = ((a^{\dagger})^*)^{-1} = (a^{\ddagger})^{-1}.$$

4. Da bilinearidade do produto geométrico,

$$(-a)(-a^{-1}) = (-1)(-1)aa^{-1} = 1. \quad \blacksquare$$

Isso mostra que não há ambiguidade em denotarmos

$$a^{-\dagger} := (a^{-1})^{\dagger},$$

$$a^{-*} := (a^{-1})^*,$$

e

$$a^{-\ddagger} := (a^{-1})^{\ddagger}.$$

## 2 Transformações ortogonais e representação adjunta

### 2.1 Projeções, reflexões e rotações

#### Projeção ortogonal e projeção paralela

**Definição 2.1.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m \leq |d|$  e  $s \in \mathbb{A}'(d)$  um  $m$ -vetor simples. A *projeção paralela* de um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  sobre  $s$  é

$$\pi_{\parallel s}(v) := (v \cdot s)s^{-1}.$$

A *projeção perpendicular* de um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  sobre  $s$  é

$$\pi_{\perp s}(v) := (v \vee s)s^{-1}.$$

Sempre vale

$$v = vss^{-1} = (v \cdot s + v \vee s)s^{-1} = \pi_{\parallel s}(v) + \pi_{\perp s}(v).$$

#### Reflexões e rotações

Para refletir um vetor  $v$  com respeito a um subespaço  $S$ , refletimos o vetor pela origem e então adicionamos duas vezes a projeção do vetor no subespaço  $S$ , para desfazer o efeito da reflexão pela origem. Isso é dado pela fórmula

$$\rho_S(v) := -v + 2\pi_S(v).$$

Note que, no caso especial do subespaço ser  $S = \{0\}$ , temos simplesmente a reflexão pela origem, dada pela inversa aditiva.

Quando temos um produto interno, a estrutura de ortogonalidade permite definir a projeção perpendicular  $\pi_{\perp S}$ , enquanto que a projeção no subespaço  $S$  é a projeção paralela  $\pi_{\parallel S}$ . Um vetor  $v$  sempre pode ser decomposto nas componentes paralela e perpendicular a  $S$ :

$$v = \pi_{\parallel S}(v) + \pi_{\perp S}(v).$$

Nesse caso, a reflexão por  $S$  é equivalentemente dada pelas fórmulas

$$\rho_S(v) = -v + 2\pi_{\parallel S}(v) = v - 2\pi_{\perp S}(v).$$



Se um  $m$ -vetor simples  $s \in \mathbb{A}(d)$  representa um subespaço linear  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ , podemos traduzir essas fórmulas em

$$\rho_s(v) = -v + (v \cdot s)s^{-1} = v - (v \vee s)s^{-1}.$$

Para refletir um vetor  $v$  com respeito a um hiperplano perpendicular a um vetor  $w$ , podemos decompor  $v$  nas componentes paralela e perpendicular a  $w$ , e então refletir a componente que é paralela a  $w$  (ou seja, que é perpendicular ao hiperplano). Isso resulta na fórmula

$$\pi_{\perp w}(v) - \pi_{\parallel w}(v) = v - 2\pi_{\parallel w}(v) = v - 2(v \cdot w)w^{-1} = v - 2\frac{v \cdot w}{|w|^2}w.$$

ou na fórmula

$$\pi_{\perp w}(v) - \pi_{\parallel w}(v) = -v + 2\pi_{\perp w}(v).$$

Note que essa operação pode ser representada usando somente o produto geométrico. Como  $w^* = -w$ , então

$$v \vee w - v \cdot w = \frac{1}{2}(vw - wv) - \frac{1}{2}(vw + wv) = -wv,$$

portanto segue que

$$\pi_{\perp w}(v) - \pi_{\parallel w}(v) = (v \vee w)w^{-1} - (v \cdot w)w^{-1} = (v \vee w - v \cdot w)w^{-1} = w^*vw^{-1}.$$

Definimos portanto a reflexão com essa fórmula.

**Definição 2.2.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $w \in \mathbb{R}^d$ . A *reflexão* no hiperplano perpendicular a  $w$  é a transformação

$$\begin{aligned} \rho_w : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ v &\longmapsto w^*vw^{-1} = v - 2\frac{v \cdot w}{|w|^2}w \end{aligned}$$

No caso em que  $w$  é unitário, vale  $w^{-1} = w = w^\dagger$ , e a fórmula se reduz a

$$\rho_w(v) = w^*vw^{-1} = -wvw = w^*vw^\dagger.$$

Uma rotação é uma composição de um número par de reflexões. Sejam  $w, w' \in \mathbb{R}^d$ . Consideremos a composição das reflexões relativas a  $w$  e a  $w'$ .

$$\rho_{w'} \circ \rho_w(v)$$

É possível mostrar que a rotação resultante por essa composição de reflexões é a rotação no plano formado por  $w \vee w'$  e pelo dobro do ângulo entre  $w$  e  $w'$ .

Consideremos agora vetores unitários  $u, u' \in \mathbb{R}^d$ . Definimos

$$j_{uu'} := \frac{u \vee u'}{|u \vee u'|}.$$

Esse é o bivector unitário que indica o plano de rotação. Para mostrar que  $j_{uu'}^2 = -1$ , primeiro notemos que

$$\begin{aligned} u \vee u' &= u \vee u'uu^{-1} \\ &= u \vee (u' \cdot u + u' \vee u)u^{-1} \\ &= u \vee ((u' \cdot u)u^{-1} + (u' \vee u)u^{-1}) \\ &= (u' \cdot u)u \vee u^{-1} + u \vee (u' \vee u)u^{-1} \\ &= u \vee (u' \vee u)u^{-1} \\ &= u \vee \pi_{\perp u}(u'). \end{aligned}$$

Agora notemos que

$$u\pi_{\perp u}(u') = u \vee (u' \vee u)u^{-1} = u(u'u - u' \cdot u)u^{-1} = uu' - u' \cdot u = u \vee u'$$

e

$$\pi_{\perp u}(u')u = (u' \vee u)u^{-1}u = u' \vee u.$$

Isso mostra que  $u$  e  $\pi_{\perp u}(u')$  anticomutam,

$$u\pi_{\perp u}(u') = u \vee u' = -u' \vee u = -\pi_{\perp u}(u')u,$$

e também que

$$j_{uu'} = \frac{u \vee u'}{|u \vee u'|} = \frac{u\pi_{\perp u}(u')}{|u \vee u'|}.$$

Como

$$|\pi_{\perp u}(u')| = |(u \vee u')u^{-1}| = |u \vee u'|,$$

segue que

$$j_{uu'}^2 = \frac{u\pi_{\perp u}(u')}{|u \vee u'|} \frac{u\pi_{\perp u}(u')}{|u \vee u'|} = -u^2 \frac{(\pi_{\perp u}(u'))^2}{|u \vee u'|^2} = -1.$$

O ângulo entre  $u$  e  $u'$  é

$$\theta_{uu'} = \cos^{-1}(u \cdot u').$$

Como

$$|u \cdot u'|^2 + |u \vee u'|^2 = 1,$$

segue que  $|u \vee u'| = \sin(\theta_{uu'})$  e então, como  $j_{uu'}^2 = -1$ ,

$$uu' = u \cdot u' + u \vee u' = \cos(\theta) + \sin(\theta)j_{u'u} = e^{\theta_{uu'}j_{uu'}}.$$

e

$$u'u = \cos(\theta) + \sin(\theta)j_{u'u} = \cos(\theta) - \sin(\theta)j_{uu'} = e^{-\theta_{uu'}j_{uu'}}.$$

Como  $uu'$  gera a rotação por  $2\theta_{uu'}$ , concluímos que a rotação por ângulo  $\alpha$  no plano de um bivector unitário  $j$  é dada por

$$e^{\frac{\alpha}{2}j}ve^{-\frac{\alpha}{2}j}$$

Por fim, enunciemos um resultado de álgebra linear.

**Proposição 2.1** (CARTAN–DIEUDONNÉ). *Seja  $d \in \mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}^d$  o espaço ortogonal com produto escalar (positivo-definido) canônico. Sejam  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma transformação ortogonal e  $n := d - \dim((T - I)^{-1}(0))$ . Então existem  $n$  reflexões ortogonais  $R_0, \dots, R_{n-1}$  por hiperplanos tais que*

$$T = R_{n-1} \circ \dots \circ R_0.$$

*Demonstração.* A prova será por indução em  $n$ . (Caso zero) Para  $n = 0$ , temos  $T = I$ , que é o produto de 0 reflexões. (Caso sucessor) Seja  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  e suponhamos que a proposição vale para todo natural menor que  $n$ . Como  $n \geq 1$ ,  $(T - I)^{-1}(0) \neq \mathbb{R}^d$ , portanto existe  $u \in \mathbb{R}^d \setminus (T - I)^{-1}(0)$ , o que significa que  $T(u) - u \neq 0$ . Definamos então o hiperplano

$$H := (\mathbb{R}(T(u) - u))^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle T(u) - u, v \rangle = 0\},$$

e a composição  $T' := R_H \circ T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , em que  $R_H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é a reflexão ortogonal com respeito  $H$ . Como  $T$  é ortogonal,

$$2 \frac{\langle T(u) - u, T(u) \rangle}{\langle T(u) - u \rangle^2} = 2 \frac{\langle T(u) \rangle^2 - \langle u, T(u) \rangle}{\langle T(u) \rangle^2 - 2\langle T(u), u \rangle + \langle u \rangle^2} = 2 \frac{\langle u \rangle^2 - \langle u, T(u) \rangle}{2\langle u \rangle^2 - 2\langle u, T(u) \rangle} = 1,$$

portanto a transformação  $T'$  satisfaz

$$T'(u) = R_H(T(u)) = T(u) - 2 \frac{\langle T(u) - u, T(u) \rangle}{\langle T(u) - u \rangle^2} (T(u) - u) = T(u) - (T(u) - u) = u,$$

o que mostra que  $\mathbb{R}u \subseteq (T' - I)^{-1}(0)$ . Além disso, para todo  $v \in (T - I)^{-1}(0)$  vale  $T(v) = v$ , portanto segue da ortogonalidade de  $T$  que

$$\langle T(u) - u, v \rangle = \langle T(u), v \rangle - \langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle - \langle u, v \rangle = 0,$$

o que implica que  $v \in H$ , logo  $(T - I)^{-1}(0) \subseteq H$ . Isso mostra que

$$(T - I)^{-1}(0) \subset (T - I)^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}u \subseteq (T' - I)^{-1}(0).$$

Como  $(T' - I)^{-1}(0) \cap H \subseteq (T - I)^{-1}(0)$ , concluímos que

$$\dim((T' - I)^{-1}(0)) = \dim((T - I)^{-1}(0)) + 1,$$

e pela hipótese de indução segue que  $T'$  é uma composição de  $n - 1$  reflexões ortogonais  $R_0, \dots, R_{n-2}$  por hiperplanos tais que  $T' = R_{n-2} \circ \dots \circ R_0$ , portanto

$$T = R_H \circ T' = R_H \circ R_{n-2} \circ \dots \circ R_0$$

é uma composição de  $n$  reflexões ortogonais por hiperplanos. ■

### Conjugação por exponencial de vetores e bivectores

**Proposição 2.2.** *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $v, v' \in \mathbb{R}^d \setminus$  vetores.*

1. *Se  $v$  e  $v'$  são paralelos, eles comutam.*
2. *Se  $v$  e  $v'$  são perpendiculares, eles anticomutam.*
3. *Se  $v$  e  $v'$  são perpendiculares diferentes de 0, eles são linearmente independentes.*

**Proposição 2.3.** *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $v \in \mathbb{R}^d$  um vetor e  $b \in \mathbb{R}^{\binom{d}{2}}$  um bivector.*

1. *Se  $v$  e  $b$  são paralelos, eles anticomutam.*
2. *Se  $v$  e  $b$  são perpendiculares, eles comutam.*

**Proposição 2.4.** *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $b \in \mathbb{R}^{\binom{d}{2}}$  um bivector (unitário ou nulário?).*

1. *Para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$[b, v] = \frac{bv - vb}{2} = b\pi_{\parallel b}(v) = -\pi_{\parallel b}(v)b.$$

2. *Para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$bpb = b^2(\pi_{\parallel b}(v) - \pi_{\perp b}(v)) = (\pi_{\parallel b}(v) - \pi_{\perp b}(v))b^2.$$

**Proposição 2.5.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ ,  $v, v' \in \mathbb{R}^d$  vetores ortogonais entre si, e  $b = vv'$  o bivector simples que eles formam.

1.  $b^2 = 0$  se, e somente se,  $\langle v \rangle^2 \langle v' \rangle^2 = 0$ .
2.  $b^2 > 0$  se, e somente se,  $\langle v \rangle^2 \langle v' \rangle^2 < 0$ .
3.  $b^2 < 0$  se, e somente se,  $\langle v \rangle^2 \langle v' \rangle^2 > 0$ .

Além disso,  $b$  é sempre produto de vetores nulários ou unitários.

*Demonstração.* Como  $v$  e  $v'$  são perpendiculares, eles anticomutam, logo  $b^2 = -v^2 v'^2$ . Os casos seguem direto. ■

**Proposição 2.6.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ ,  $v, v' \in \mathbb{R}^d$  vetores unitários ou nulários ortogonais entre si,  $b := vv'$  o bivector simples que eles formam, e

$$\begin{aligned} e^{\theta b} \times : \mathbb{R}^2(b) &\longrightarrow \mathbb{R}^2(b) \\ p &\longmapsto e^{\theta b} p \end{aligned}$$

a transformação linear restrita ao plano  $\mathbb{R}^2(b)$ .

1. Caso  $b^2 = 0$ :

- Se  $\langle v \rangle^2 = 0$  e  $\langle v' \rangle^2 = 0$ ,  $e^{\theta b} \times$  é a identidade:

$$e^{\theta b} \times = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Se  $\langle v \rangle^2 = 0$  e  $\langle v' \rangle^2 = 1$ ,  $e^{\theta b} \times$  é uma transvecção (cisalhamento) paralela a  $v$  por fator  $\theta$ :

$$e^{\theta b} \times = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Se  $\langle v \rangle^2 = 0$  e  $\langle v' \rangle^2 = -1$ ,  $e^{\theta b} \times$  é uma transvecção (cisalhamento) paralela a  $v$  por fator  $-\theta$ :

$$e^{\theta b} \times = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Caso  $b^2 = -1$ :

- Se  $\langle v \rangle^2 = 1$  e  $\langle v' \rangle^2 = 1$ ,  $e^{\theta b} \times$  é uma rotação de  $v$  para  $v'$  por ângulo  $-\theta$  (ou de  $v'$  para  $v$  por ângulo  $\theta$ ):

$$e^{\theta b} \times = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- Se  $\langle v \rangle^2 = -1$  e  $\langle v' \rangle^2 = -1$ ,  $e^{\theta b} \times$  é uma rotação de  $v$  para  $v'$  por ângulo  $\theta$ :

$$e^{\theta b} \times = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

3. Caso  $b^2 = 1$ :

- Se  $\langle v \rangle^2 = -1$  e  $\langle v' \rangle^2 = 1$ ,  $e^{\theta b} \times$  é uma rotação (translação?) hiperbólica expansora em  $v + v'$  e contratora em  $v - v'$  com expoente  $\theta$ :

$$e^{\theta b} \times = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Como  $v$  e  $v'$  são uma base, para todo  $p \in \mathbb{R}^2(b)$  existem  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}$  tais que  $p = p_0 v + p_1 v'$ . Basta então calcular em cada caso usando  $b = vv'$  e a anticomutatividade de  $v$  e  $v'$ .

1. Caso  $b^2 = 0$ . Nesse caso,  $e^{\theta b} = 1 + \theta b$ .

2. Caso  $b^2 = -1$ . Nesse caso,  $e^{\theta b} = \cos(\theta) + \sin(\theta)b$ .
3. Caso  $b^2 = 1$ . Nesse caso,  $e^{\theta b} = \cosh(\theta) + \sinh(\theta)b$ .

■

**Proposição 2.7.** *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$  um vetor e  $\theta \in \mathbb{R}$  um escalar. Para todo vetor  $p \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\rho_{e^{\frac{\theta}{2}v}}(p) = e^{\frac{\theta}{2}v} p e^{-\frac{\theta}{2}v} = \pi_{\parallel v}(p) + e^{\theta v} \pi_{\perp v}(p) = \pi_{\parallel v}(p) + \pi_{\perp v}(p) e^{-\theta v}.$$

$$\rho_{e^{\frac{\theta}{2}v}}(p) = e^{\frac{\theta}{2}v} p e^{-\frac{\theta}{2}v} = \pi_v^{\parallel}(p) + e^{\theta v} \pi_v^{\perp}(p) = \pi_{\parallel v}(p) + \pi_{\perp v}(p) e^{-\theta v}.$$

*Demonstração.* Ressaltamos primeiro que, de acordo com a **PROPOSIÇÃO 2.2**, se  $p$  é paralelo a  $v$ , eles comutam, portanto

$$p \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) = \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) p$$

$$p \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) = \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) p$$

e, se  $p$  é perpendicular a  $v$ , eles anticomutam, portanto

$$p \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) = -\sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) p$$

$$p \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) = \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) p.$$

Além disso,  $\cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right)$  e  $\sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right)$  sempre comutam entre si. Assim obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{e^{\frac{\theta}{2}v}}(p) &= e^{\frac{\theta}{2}v} p e^{-\frac{\theta}{2}v} \\ &= \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \right) (\pi_{\parallel v}(p) + \pi_{\perp v}(p)) \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) - \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \right) \\ &= \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right)^2 - \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right)^2 - \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \right) \pi_{\parallel v}(p) \\ &\quad + \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right)^2 + \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right)^2 + \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \cosh\left(\frac{\theta}{2}v\right) \right) \pi_{\perp v}(p) \\ &= (1 + 0) \pi_{\parallel v}(p) + (\cosh(\theta v) + \sinh(\theta v)) \pi_{\perp v}(p) \\ &= \pi_{\parallel v}(p) + e^{\theta v} \pi_{\perp v}(p) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$e^{\frac{\theta}{2}v} p e^{-\frac{\theta}{2}v} = \pi_{\parallel v}(p) + \pi_{\perp v}(p) e^{-\theta v}.$$

■

**Proposição 2.8.** *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ ,  $b \in \mathbb{R}^{\binom{d}{2}}$  um bivector simples e  $\theta \in \mathbb{R}$  um escalar. Para todo vetor  $p \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\rho_{e^{\frac{\theta}{2}b}}(p) = e^{\frac{\theta}{2}b} p e^{-\frac{\theta}{2}b} = e^{\theta b} \pi_{\parallel b}(p) + \pi_{\perp b}(p) = \pi_{\parallel b}(p) e^{-\theta b} + \pi_{\perp b}(p).$$

*Demonstração.* Ressaltemos primeiro que, de acordo com a **PROPOSIÇÃO 2.3**, se  $p$  é paralelo a  $b$ , eles anticomutam, portanto

$$\begin{aligned} p \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) &= -\sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right)p \\ p \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) &= \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right)p \end{aligned}$$

e, se  $p$  é perpendicular a  $b$ , eles comutam, portanto

$$\begin{aligned} p \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) &= \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right)p \\ p \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) &= \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right)p. \end{aligned}$$

Além disso,  $\cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right)$  e  $\sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right)$  sempre comutam entre si. Assim obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{e^{\frac{\theta}{2}b}}(p) &= e^{\frac{\theta}{2}b} p e^{-\frac{\theta}{2}b} \\ &= \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \right) (\pi_{\parallel b}(p) + \pi_{\perp b}(p)) \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) - \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \right) \\ &= \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right)^2 + \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right)^2 + \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \right) \pi_{\parallel b}(p) \\ &\quad + \left( \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right)^2 - \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right)^2 - \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) + \sinh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \cosh\left(\frac{\theta}{2}b\right) \right) \pi_{\perp b}(p) \\ &= (\cosh(\theta b) + \sinh(\theta b)) \pi_{\parallel b}(p) + (1 + 0) \pi_{\perp b}(p) \\ &= e^{\theta b} \pi_{\parallel b}(p) + \pi_{\perp b}(p) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$e^{\frac{\theta}{2}b} p e^{-\frac{\theta}{2}b} = \pi_{\parallel b}(p) e^{-\theta b} + \pi_{\perp b}(p). \quad \blacksquare$$

**Proposição 2.9.** Sejam  $d = (d_-, d_+) \in \mathbb{N}^2$  e  $v \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{A}'(d)$  um vetor invertível. A transformação  $\rho_v$  pode ser restrita a  $\mathbb{R}^d$  e é a reflexão no hiperplano perpendicular a  $v$ .

**Proposição 2.10.** Sejam  $d = (d_-, d_+) \in \mathbb{N}^2$  e  $v, v' \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{A}'(d)$  vetores invertíveis. A transformação  $\rho_{v'v}$  pode ser restrita a  $\mathbb{R}^d$  e é a rotação por um ângulo  $2\angle(v, v')$  no plano paralelo a  $v \wedge v'$ .

## 2.2 Ortores e rotores

### Representação adjunta

Baseado na definição da reflexão  $\rho_w$  e rotação  $\rho_{w'w}$ , vamos definir uma ação em  $\mathbb{A}(d)$  pelos elementos invertíveis de  $\mathbb{A}(d)$ .

**Definição 2.3.** Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$  e  $r \in \mathbb{A}'(d)$  um elemento invertível. A representação adjunta de  $r$  é

$$\begin{aligned} \rho_r : \mathbb{A}(d) &\longrightarrow \mathbb{A}(d) \\ a &\longmapsto r^* a r^{-1} \end{aligned}$$

A proposição a seguir mostra que a representação adjunta é uma representação de  $\mathbb{A}'(d)$  em  $\mathbb{A}(d)$ .

**Proposição 2.11** (Representação adjunta é representação em  $\mathbb{A}(d)$ ). *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . A representação adjunta satisfaz*

1.  $\rho_1 = I$ .
2. Para todos  $r, r' \in \mathbb{A}'(d)$ ,
$$\rho_{r'} \circ \rho_r = \rho_{r'r}.$$
3. Para todo  $r \in \mathbb{A}'(d)$ ,  $\rho_r$  é bijeção linear e  $\rho_r^{-1} = \rho_{r^{-1}}$ .

*Demonstração.* 1. Para todo  $a \in \mathbb{A}(d)$ ,

$$\rho_1(a) = 1^* a 1^{-1} = 1a1 = a = I(a),$$

portanto  $\rho_1 = I$ .

2. Como a inversão central é automorfismo e a inversão multiplicativa é antiautomorfismo, para todo  $a \in \mathbb{A}(d)$  vale

$$\rho_{r'} \circ \rho_r(a) = r'^*(r^* a r^{-1}) r'^{-1} = (r'r)^* a (r'r)^{-1} = \rho_{r'r}(a),$$

portanto  $\rho_{r'} \circ \rho_r = \rho_{r'r}$ .

3. A linearidade segue da bilinearidade do produto geométrico. Para a bijetividade, basta notar que a inversa de  $\rho_r$  é  $\rho_{r^{-1}}$  pois

$$\rho_{r^{-1}} \circ \rho_r = \rho_1 = \rho_r \circ \rho_{r^{-1}}.$$

■

A **PROPOSIÇÃO 2.11** mostra que a representação adjunta é uma representação

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{A}'(d) &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}(d)) \\ r &\longmapsto \rho_r : \mathbb{A}(d) \longrightarrow \mathbb{A}(d) \\ v &\longmapsto r^* v r^{-1}. \end{aligned}$$

**Pergunta 2.** A ação de  $\mathbb{A}'(d)$  por  $\rho$  preserva a estrutura de super-álgebra graduada de  $\mathbb{A}(d)$ , isto é, os subespaços par  $\mathbb{A}_0(d)$  e ímpar  $\mathbb{A}_1(d)$ ?

**Proposição 2.12.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Valem as seguintes propriedades:*

1. Para todos  $r \in \mathbb{A}'(d)$  e  $a \in \mathbb{A}(d)$ ,
$$(\rho_r(a))^* = \rho_{r^*}(a^*).$$
2. Para todos  $r \in \mathbb{A}'(d)$  e  $a \in \mathbb{A}'(d)$ ,
$$(\rho_r(a))^{-1} = \rho_{r^*}(a^{-1}).$$

*Demonstração.* 1. Como a inversão central  $*$  é automorfismo,

$$(\rho_r(a))^* = r^* a r^{-1*} = r a^* (r^*)^{-1} = \rho_{r^*}(a^*).$$

2. Como a inversa multiplicativa é antiautomorfismo,

$$(\rho_r(a))^{-1} = (r^* a r^{-1})^{-1} = r a^{-1} (r^*)^{-1} = \rho_{r^*}(a^{-1}).$$

■

**Proposição 2.13.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . A representação adjunta pode ser restrita a uma ação de  $\mathbb{A}'_0(d)$  em  $\mathbb{A}_0(d)$ .*

*Demonstração.* Para todos  $r \in \mathbb{A}'_0(d)$  e  $a \in \mathbb{A}_0(d)$ , vale  $r^* = r$  e  $a^* = a$ , portanto segue da **PROPOSIÇÃO 2.12** que

$$(\rho_r(a))^* = \rho_{r^*}(a^*) = \rho_r(a),$$

portanto  $\rho_r(a) \in \mathbb{A}_0(d)$ .

■

## Grupo de ortores

De modo geral, a ação adjunta não pode ser restrita ao espaço  $\mathbb{R}^d$ , pois para um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  o elemento  $i^*vi^{-1}$  não necessariamente é um vetor. Vamos então nos restringir aos elementos invertíveis da álgebra  $A(d)$  que levam vetores em vetores pela representação adjunta, pois isso nos permite estudar transformações lineares no espaço vetorial  $\mathbb{R}^d$ .

**Definição 2.4.** O grupo dos ortores<sup>13</sup> de  $\mathbb{R}^d$  é

$$\mathbb{G}(d) := \{r \in A'(d) \mid \rho_r(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^d\}.$$

O grupo de ortores pares<sup>14</sup> de  $\mathbb{R}^d$  é

$$\mathbb{G}_0(d) := \mathbb{G}(d) \cap A_0(d).$$

Chamamos de *ortores* pois, como será demonstrado mais adiante, eles são representantes de transformações ortogonais.

**Proposição 2.14.** Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . O grupo dos ortores  $\mathbb{G}(d)$  é um grupo com respeito ao produto geométrico e, para cada  $r \in \mathbb{G}(d)$ , a restrição  $\rho_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é bijeção linear.

*Demonstração.* Seja  $r \in \mathbb{G}(d)$ . Primeiro notemos que, como  $\rho_r : A(d) \rightarrow A(d)$  é bijeção linear e, quando restrita a  $\mathbb{R}^d$  tem sua imagem contida em  $\mathbb{R}^d$ , segue que a restrição  $\rho_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é bijeção (pelo Teorema do Núcleo e da Imagem).

Basta então provar que  $\mathbb{G}(d)$  é subgrupo de  $A'(d)$ . Sejam  $r, r' \in \mathbb{G}(d)$ . Como a representação adjunta por  $r$  e  $r'$  levam vetores em vetores, para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ , vale  $\rho_r(v) = r^*vr^{-1} \in \mathbb{R}^d$ , portanto

$$\rho_{r'r}(v) = r'^*(r^*vr^{-1})r'^{-1} \in \mathbb{R}^d,$$

o que prova que  $r'r \in \mathbb{G}(d)$ .

Agora seja  $r \in \mathbb{G}(d)$  e consideremos as transformações  $\rho_r : A(d) \rightarrow A(d)$  e  $\rho_{r^{-1}} : A(d) \rightarrow A(d)$ . De acordo com a PROPOSIÇÃO 2.11, essas transformações são inversas uma da outra. Suponhamos por absurdo que  $\rho_{r^{-1}}$ , quando restrita a  $\mathbb{R}^d$ , não satisfizesse  $\rho_{r^{-1}}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^d$ ; ou seja, que ela não levasse vetores em vetores. Então existiria um vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\rho_{r^{-1}}(v) \notin \mathbb{R}^d$ . Mas, como  $\rho_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é bijeção, existe um vetor  $w \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\rho_r(w) = v$ , e isso implicaria que

$$w = \rho_{r^{-1}} \circ \rho_r(w) = \rho_{r^{-1}}(v) \notin \mathbb{R}^d,$$

uma contradição. Assim concluímos que  $\rho_{r^{-1}}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^d$  e, portanto, que  $r^{-1} \in \mathbb{G}(d)$ . ■

Por consequência das PROPOSIÇÕES 2.11 e 2.14, podemos restringir a representação adjunta a uma representação de  $\mathbb{G}(d)$  em  $\mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{G}(d) &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}^d) \\ r &\longmapsto \rho_r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ v &\longmapsto r^*vr^{-1}. \end{aligned}$$

**Pergunta 3.** Isso também implica que a ação de  $\mathbb{G}(d)$  por  $\rho$  preserva todos os subespaços  $\mathbb{R}^{(d)}_m$ ? Ela preserva  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{(d)}_1$  por definição. Também preserva  $\mathbb{R}$ ? A resposta afirmativa seria interessante do ponto de vista algébrico/estrutural, pois tiraria uma certa arbitrariedade na escolha de  $\mathbb{G}(d)$  preservar  $\mathbb{R}^d$ , pois mostraria que  $\mathbb{G}(d)$  é de fato o subgrupo que preserva a estrutura de álgebra graduada de  $A(d)$ .

13. Esse grupo é denominado *grupo de Lipschitz* ou *grupo de Clifford* na literatura.

14. Esse subgrupo é chamado de *grupo especial de Lipschitz/Clifford*.



**Proposição 2.15.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Se  $r \in \mathbb{G}(d)$ , então  $r^*, r^\dagger, r^\ddagger, -r \in \mathbb{G}(d)$ .*

*Demonstração.* Por definição, para todo  $v \in \mathbb{R}^d$  vale  $r^*vr^{-1} \in \mathbb{R}^d$ .

1. Como a inversão central  $*$  é automorfismo e em  $\mathbb{R}^d$  é a inversa aditiva, vale  $v = -v^*$  e  $-(r^*vr^{-1})^* = r^*vr^{-1}$ , logo segue que

$$(r^*)^*v(r^*)^{-1} = (r^*)^*(-v^*)(r^{-1})^* = -(r^*vr^{-1})^* = r^*vr^{-1} \in \mathbb{R}^d$$

portanto  $r^* \in \mathbb{G}(d)$ .

2. Como  $\rho_{r^*-1}(v) = r^{-1}vr^* \in \mathbb{R}^d$ , e a transposição  $\dagger$  é antiautomorfismo e em  $\mathbb{R}^d$  é a identidade, vale  $v = v^\dagger$  e  $(r^{-1}vr^*)^\dagger = r^{-1}vr^*$ , logo segue que

$$(r^\dagger)^*v(r^\dagger)^{-1} = (r^*)^\dagger v^\dagger (r^{-1})^\dagger = (r^{-1}vr^*)^\dagger = r^{-1}vr^* \in \mathbb{R}^d,$$

portanto  $r^\dagger \in \mathbb{G}(d)$ .

3. Segue da conjugação  $\ddagger$  ser composição da transposição  $\dagger$  com a inversão central  $*$ .
4. Segue da linearidade do produto que

$$(-r)^*v(-r)^{-1} = r^*vr^{-1} \in \mathbb{R}^d,$$

portanto  $-r \in \mathbb{G}(d)$ . ■

Provamos agora um resultado que relaciona a ação de um ortor com a ação de sua inversa, sua transposta e sua inversão central.

**Proposição 2.16.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Para todo ortor  $r \in \mathbb{G}(d)$  e todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\rho_{r^*}(v) = \rho_r(v)$$

e

$$\rho_{r^\dagger}(v) = \rho_{r^{-1}}(v).$$

*Demonstração.* Sejam  $r \in \mathbb{G}(d)$  e  $v \in \mathbb{R}^d$ . Por definição de  $r$  vale que  $r^*vr^{-1} \in \mathbb{R}^d$ . Então, como a inversão central  $*$  é a inversa aditiva quando restrita a  $\mathbb{R}^d$ , vale  $v = -v^*$  e  $-(r^*vr^{-1})^* = r^*vr^{-1}$ . Portanto, como a inversão central  $*$  é automorfismo, segue que

$$\rho_{r^*}(v) = (r^*)^*v(r^*)^{-1} = -(r^*)^*v^*(r^{-1})^* = -(r^*vr^{-1})^* = r^*vr^{-1} = \rho_r(v).$$

Note que  $\rho_{r^{-*}}(v) = r^{-1}vr^*$  e, pela relação anterior,  $\rho_{r^{-*}} = \rho_{r^{-1}}$ . Da **PROPOSIÇÃO 2.15** segue que  $r^{-*} \in \mathbb{G}(d)$ , o que implica que  $r^{-1}vr^* \in \mathbb{R}^d$ . Então, como a transposição  $\dagger$  é antiautomorfismo, e é a identidade quando restrita a  $\mathbb{R}^d$ , segue que

$$\rho_{r^\dagger}(v) = (r^\dagger)^*v(r^\dagger)^{-1} = (r^*)^\dagger v^\dagger (r^{-1})^\dagger = (r^{-1}vr^*)^\dagger = (\rho_{r^{-*}}(v))^\dagger = \rho_{r^{-*}}(v) = \rho_{r^{-1}}(v). \quad \blacksquare$$

Podemos também mostrar que um produto de vetores invertíveis é um ortor.

**Proposição 2.17** (Produto de vetores invertíveis é ortor). *Sejam  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ ,  $w_0, \dots, w_{m-1} \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{A}'(d)$  vetores não nulos. Então  $w_0 \cdots w_{m-1} \in \mathbb{G}(d)$ .*

*Demonstração.* Seja  $w \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{A}'(d)$ . Para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$-wv = vw - (vw + wv) = vw - 2v \cdot w,$$

portanto

$$\begin{aligned}\rho_w(v) &= w^* v w^{-1} \\ &= -w v w^{-1} \\ &= (v w - 2v \cdot w) w^{-1} \\ &= v - 2(v \cdot w) w^{-1} \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Isso mostra que  $w \in \mathbb{G}(d)$ . Como

$$\rho_{w_0 \cdots w_{m-1}} = \rho_{w_0} \circ \cdots \circ \rho_{w_{m-1}},$$

concluimos que  $w_0 \cdots w_{m-1} \in \mathbb{G}(d)$ . ■

Ainda não temos as ferramentas necessárias para provar que de fato todo ortor é um produto de vetores, mas mais adiante isso será feito. De modo mais geral, isso só vale quando a característica do corpo é diferente de 2.

Antes de passar para a próxima seção, caracterizamos o núcleo da ação restrita aos vetores.

**Proposição 2.18.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . O núcleo da representação adjunta*

$$\rho : \mathbb{G}(d) \rightarrow \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbb{R}^d)$$

*é o grupo multiplicativo  $\mathbb{A}'(0, d_0, 0)$ . Caso  $d_0 = 0$ , o núcleo é o grupo multiplicativo dos escalares  $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*

*Além disso,  $r \in \mathbb{G}(d)$  pertencer ao núcleo de  $\rho$  é equivalente a  $r^{-1}$  pertencer ao núcleo, equivalente a  $r^*$  pertencer ao núcleo, e equivalente a  $r^\dagger$  pertencer ao núcleo.*

*Demonstração.* Seja  $r \in \mathbb{A}'(d)$  tal que  $\rho_r = I$ . Então, para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ , vale  $r^* v r^{-1} = \rho_r(v) = v$ , portanto

$$r^* v = v r.$$

Pela **PROPOSIÇÃO 1.4**, isso vale se, e somente se,  $r \in \mathbb{A}(0, d_0, 0) \cap \mathbb{A}'(d) = \mathbb{A}'(0, d_0, 0)$ . No caso em que  $d_0 = 0$ , vale  $\mathbb{A}(0, d_0, 0) = \mathbb{R}$ , portanto  $\mathbb{A}'(0, d_0, 0) = \mathbb{R}'$ .

Por fim, note que por consequência das **PROPOSIÇÕES 2.11** e **2.16**,  $\rho_r = \rho_{r^*}$  e  $\rho_r^{-1} = \rho_{r^{-1}}$ . Portanto  $\rho r = I$  equivale a qualquer uma dessas representações serem iguais à identidade. ■

### Forma quadrática de ortores

De acordo com a **PROPOSIÇÃO 1.11**, a forma quadrática de um produto de vetores  $r = v_0 \cdots v_{m-1}$  satisfaz

$$\langle r \rangle^2 = r r^\dagger.$$

Consideremos então o valor  $r r^\dagger$  de um ortor  $r \in \mathbb{G}(d)$ . Queremos mostrar que esse valor é um número real, o que implica que é igual à forma quadrática de  $r$ , pois ela é a parte real de  $r r^\dagger$ :

$$\langle r \rangle^2 = \langle r r^\dagger \rangle_0.$$

No entanto, quando  $d_0 \neq 0$ , isso não vale, pois se  $\epsilon_0$  é um vetor canônico nulário, então  $1 + \epsilon_0$  é invertível, pois

$$(1 + \epsilon_0)(1 - \epsilon_0) = 1^2 - \epsilon_0^2 = 1,$$

logo  $1 + \epsilon_0 \in \mathbb{G}(d)$ , mas

$$(1 + \epsilon_0)(\epsilon_0)^\dagger = 1 + 2\epsilon_0 \notin \mathbb{R}.$$

No entanto, isso só ocorre por causa dos vetores canônicos nulários. Quando o produto escalar é não-degenerado,  $r r^\dagger \in \mathbb{R}$ . O truque é mostrar que  $r r^\dagger$  está no núcleo da representação  $\rho$ , o que segue como consequência da **PROPOSIÇÃO 2.16**.

**Proposição 2.19.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Para todo ortor  $r \in \mathbb{G}(d)$ ,*

$$rr^\dagger = \langle r \rangle^2 \in \mathbb{A}'(0, d_0, 0).$$

*Se  $d_0 = 0$ ,  $rr^\dagger \in \mathbb{R}'$ . O mesmo vale para  $r^\dagger r$ .*

*Demonstração.* Como  $r \in \mathbb{G}(d)$ , segue da **PROPOSIÇÃO 2.16** que, para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\rho_{rr^\dagger}(v) = \rho_r \circ \rho_{r^\dagger}(v) = \rho_r \circ \rho_{r^{-1}}(v) = v.$$

Isso mostra que  $rr^\dagger$  está no núcleo da representação adjunta  $\rho$ , portanto segue da **PROPOSIÇÃO 2.18** que pertence a  $\mathbb{A}'(0, d_0, 0)$ . O mesmo vale para  $r^\dagger r$  pois

$$\rho_{r^\dagger r}(v) = \rho_{r^\dagger} \circ \rho_r(v) = \rho_{r^{-1}} \circ \rho_r(v) = v.$$

Alternativamente, isso também segue de

$$r^\dagger r = ((r^{-1})(r^{-1})^\dagger)^{-1}.$$

Se  $d_0 = 0$ , então  $\mathbb{A}'(0, d_0, 0) = \mathbb{R}'$ . ■

Finalmente, podemos provar que a representação adjunta de um ortor  $r$  é uma transformação ortogonal.

**Proposição 2.20.** *Seja  $d = (d_-, d_0, d_+) \in \mathbb{N}^3$ . Para todo  $r \in \mathbb{G}(d)$ ,  $\rho_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma transformação ortogonal e, se  $d = (0, 0, d_+)$ , a restrição da representação adjunta  $\rho : \mathbb{G}(d) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$  é sobrejetiva.*

*Demonstração.* Seja  $v \in \mathbb{R}^d$ . Como  $r \in \mathbb{G}(d)$ , então  $r^*vr^{-1} \in \mathbb{R}^d$ , portanto  $(r^*vr^{-1})^\dagger = r^*vr^{-1}$  e então

$$\langle r^*vr^{-1} \rangle^2 = (r^*vr^{-1})^2 = (r^*vr^{-1})^\dagger (r^*vr^{-1}).$$

Como  $r^\dagger r$  está no núcleo de  $\rho$ ,

$$(r^\dagger r)^* v = v(r^\dagger r).$$

Com isso, e usando o fato de que a inversão central  $*$  é automorfismo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle r^*vr^{-1} \rangle^2 &= (r^*vr^{-1})^\dagger (r^*vr^{-1}) \\ &= r^{-\dagger} v^\dagger (r^*)^\dagger r^* vr^{-1} \\ &= r^{-\dagger} v (r^\dagger r)^* vr^{-1} \\ &= r^{-\dagger} v v (r^\dagger r) r^{-1} \\ &= \langle v \rangle^2 r^{-\dagger} r^\dagger r r^{-1} \\ &= \langle v \rangle^2. \end{aligned}$$

Agora consideremos  $d_- = d_0 = 0$ . Para mostrar a sobrejetividade, seja  $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$  uma transformação ortogonal. Pelo teorema de Cartan–Dieudonné (**PROPOSIÇÃO 2.1**), existem reflexões  $R_0, \dots, R_{d-1}$  tais que  $T = R_{d-1} \circ \dots \circ R_0$ . Para cada reflexão  $R_l$ , escolhemos um vetor  $v_l \in \mathbb{R}^d$  que é ortogonal ao hiperplano de reflexão de  $R_l$ , o que implica que  $R_l = \rho_{v_l}$ . Portanto, definindo  $r := v_{d-1} \cdots v_0$ , segue que  $r \in \mathbb{G}(d)$  e

$$T = R_{d-1} \circ \dots \circ R_0 = \rho_{v_{d-1}} \circ \dots \circ \rho_{v_0} = \rho_r. \quad \blacksquare$$

A **PROPOSIÇÃO 2.20** mostra que as transformações lineares  $\rho_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  para  $\rho \in \mathbb{G}(d)$  são transformações ortogonais, o que justifica o nome ortor para um elemento de  $\mathbb{G}(d)$  e permite restringir  $\rho$  a uma ação de  $\mathbb{G}(d)$  no grupo ortogonal  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ .

$$\begin{aligned}\rho : \mathbb{G}(d) &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \\ r &\longmapsto \rho_r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ v &\longmapsto r^* v r^{-1}.\end{aligned}$$

O fato de que  $\rho_r$  é uma transformação ortogonal em  $\mathbb{R}^d$  também mostra que, por consequência da **PROPOSIÇÃO 2.16**, a transposta de  $\rho_r$  é igual a  $\rho_{r^\dagger}$ . Isso mostra que o termo transposta não é só uma analogia entre a transposição de matrizes e bivectores, mas tem um caráter algébrico.

**Pergunta 4.** As transformações  $\rho_r$  para ortores  $r \in \mathbb{G}(d)$  preservam a norma quadrática na álgebra  $\mathbb{A}(d)$ ? Se sim, o subgrupo de  $\mathbb{A}'(d)$  com essa propriedade coincide com  $\mathbb{G}(d)$ ? Se sim, isso classificaria o grupo  $\mathbb{G}(d)$  não só como aquele que preserva  $\mathbb{R}^d$ , mas como o que gera transformações ortogonais em  $\mathbb{A}(d)$ .

Finalmente, podemos concluir que o grupo de ortores é o grupo de todos os produtos de vetores não nulos.

**Proposição 2.21.** *Seja  $d \in \mathbb{N}$ . O grupo de ortores  $\mathbb{G}(d)$  coincide com o conjunto de todos os produtos de vetores não nulos.*

*Demonstração.* Devemos mostrar a equivalência em ambos sentidos.

- ( $\subseteq$ ) (Isso não vale para qualquer corpo, existe uma única exceção para característica 2.) Segue do teorema de Cartan–Dieudonné (**PROPOSIÇÃO 2.1**), que afirma que toda transformação ortogonal em  $\mathbb{R}^d$  é composição de até  $d$  reflexões.
- ( $\supseteq$ ) Seja  $r = v_{m-1} \cdots v_0$ . Então

$$\rho_r = \rho_{v_{m-1}} \circ \cdots \circ \rho_{v_0}.$$

Cada fator  $\rho_{v_i}$  é uma reflexão, portanto leva vetor em vetor, o que implica que  $\rho_r$  leva vetor em vetor. ■

Podemos restringir um pouco mais o grupo de ortores  $\mathbb{G}(d)$  se considerarmos somente ortores unitários, isto é, aqueles que têm forma quadrática igual a  $\pm 1 \in \mathbb{S}^0$ .

**Definição 2.5.** *Seja  $d \in \mathbb{N}$ . O grupo de ortores unitários de  $\mathbb{R}^d$  é o grupo*

$$\mathbb{SG}(d) := \{r \in \mathbb{G}(d) \mid \langle r \rangle^2 \in \mathbb{S}^0\}.$$

Esse grupo é denominado na literatura como  $\text{Pin}(d)$ . Como para todo  $r \in \mathbb{G}(d)$  temos  $\langle r \rangle^2 \neq 0$  (**PROPOSIÇÃO 1.13**), então podemos definir

$$u := \frac{|\langle r \rangle^2|^{\frac{1}{2}}}{\langle r \rangle^2} r.$$

Assim segue que

$$\langle u \rangle^2 = u^2 = \frac{|\langle r \rangle^2|^{\frac{1}{2}}}{\langle r \rangle^2} \frac{|\langle r \rangle^2|^{\frac{1}{2}}}{\langle r \rangle^2} r r = \frac{|\langle r \rangle^2|}{\langle r \rangle^2} \frac{1}{\langle r \rangle^2} \langle r \rangle^2 = \frac{|\langle r \rangle^2|}{\langle r \rangle^2} = \pm 1 \in \mathbb{S}^0$$

e, para todo  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\rho_r(v) = r^* v r^{-1} = u^* v u^{-1} = \rho_u(v),$$

portanto  $\rho_r = \rho_u$ , o que mostra que a representação adjunta pode ser restrita a  $\mathbb{SG}(d)$ .

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{SG}(d) &\longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \\ r &\longmapsto \rho_r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ v &\longmapsto r^* v r^{-1}. \end{aligned}$$

### Grupo de rotores e rotações

Podemos também considerar um subgrupo dos ortores.

**Definição 2.6.** Seja  $d \in \mathbb{N}$ . O grupo de rotores (ou ortores de dimensão par) de  $\mathbb{R}^d$  é o grupo

$$\mathbb{G}_0(d) := \mathbb{G}(d) \cap \mathbb{A}_0(d) = \{r \in \mathbb{G}(d) \mid r^* = r\}.$$

Esse grupo é às vezes denominado grupo de Clifford/Lipschitz especial. O nome rotor indica que esses elementos são os geradores das rotações (transformações ortogonais que preservam orientação (de determinante positivo)), como será demonstrado adiante.

Para um rotor  $r \in \mathbb{G}_0(d)$ , vale

$$\rho_r(v) = r v r^{-1}.$$

## 3 Cálculo geométrico

Lembremos que a **DEFINIÇÃO 1.11** determina que, para  $d \in \mathbb{N}$ , o produto escalar de multivetores  $a, a' \in \mathbb{A}(d)$  é o escalar

$$\langle a, a' \rangle := \frac{1}{2} \langle a a'^{\dagger} + a' a^{\dagger} \rangle_0$$

e a forma quadrática de um multivetor  $a \in \mathbb{A}(d)$  é o escalar

$$\langle a \rangle^2 := \langle a a^{\dagger} \rangle_0.$$

Para vetores  $v_0, \dots, v_{m-1} \in \mathbb{R}^d$ , vale

$$\langle v_0 \cdots v_{m-1} \rangle^2 = \langle v_0 \rangle^2 \cdots \langle v_{m-1} \rangle^2.$$

Esse produto escalar faz de  $\mathbb{A}(d)$  um espaço geométrico (**DEFINIÇÃO 0.1**). Como para  $d \in \mathbb{N}$  ele é positivo definido, podemos portanto definir a norma de um multivetor  $a \in \mathbb{A}(d)$  como

$$|a| := \langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}}$$

e então considerar a distância entre multivetores  $a, a' \in \mathbb{A}(d)$  dada por

$$|a, a'| := |a' - a| = \langle a' - a, a' - a \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Assim  $\mathbb{A}(d)$  se torna um espaço normado e um espaço métrico, e portanto possui uma topologia natural induzida pela métrica, o que nos permite falar em conjuntos abertos e limites de sequências e funções. Vamos usar essa métrica para estudar transformações  $f : U \subseteq \mathbb{A}(d) \rightarrow \mathbb{A}(d')$ .

Note que podemos identificar a álgebra geométrica  $\mathbb{A}(d)$  com o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{2^d}$  identificando a base canônica

$$\bigcup_{m=0}^d \{i_h \mid h \in \binom{[d]}{m}\} = \bigcup_{m=0}^d \{i_{h_0, \dots, h_{m-1}} \mid 0 \leq h_0 < \dots < h_{m-1} < d\}$$

de  $\mathbb{A}(d)$  com a base canônica  $\{i_h \mid 0 \leq h < 2^d\}$  de  $\mathbb{R}^{2^d}$ . Essa identificação dá a mesma topologia e distância que a métrica  $|\cdot, \cdot|$  definida acima.

### 3.1 Retângulos, cadeias de retângulos e bordos

**Definição 3.1** (Retângulo). Sejam  $d \in \mathbb{N}$  e  $d' \in \llbracket d \rrbracket$ . Um *retângulo  $d'$ -dimensional* em  $\mathbb{R}^d$  é um conjunto  $R \subseteq \mathbb{R}^d$  da forma

$$R = L^{(0)} \times \dots \times L^{(d-1)},$$

em que  $d'$  dos conjuntos  $L^{(l)}$  são intervalos reais não degenerados e  $(d - d')$  são degenerados (isto é, pontos/conjuntos unitários), todos não vazios.

**Notação 3.1.1.** Para simplificar notação, dados  $l, l' \in \llbracket d \rrbracket$ , vamos denotar o produto dos intervalos consecutivos  $L^{(l)}, \dots, L^{(l')}$  por

$$L^{(l, \dots, l')} := L^{(l)} \times \dots \times L^{(l')},$$

com o entendimento de que esse produto é trivial (conjunto unitário  $\mathbb{1}$ ) se  $l' < l$ .

**Definição 3.2** (Cadeia de retângulos). Sejam  $d \in \mathbb{N}$  e  $d' \in \llbracket d \rrbracket$ . Uma *cadeia de retângulos  $d'$ -dimensionais* em  $\mathbb{R}^d$  é uma soma formal da forma

$$R = \bigoplus_{n=0}^{n'-1} c_n R_n,$$

em que os  $c_n \in \mathbb{R}$  são constantes reais e os  $R_n \subseteq \mathbb{R}^d$  são retângulos  $d'$ -dimensionais em  $\mathbb{R}^d$ .

Lembremos que, dado um intervalo real não vazio  $L \subseteq \mathbb{R}$ , seu extremo inferior é denotado  $\partial_{-1}L = \partial_-L$  e seu extremo superior é denotado  $\partial_{+1}L = \partial_+L$ . Temos sempre  $\partial_-L \leq \partial_+L$ . Esse intervalo pode ser de qualquer uma das seguintes formas:  $] \partial_-L, \partial_+L[$  (aberto),  $[ \partial_-L, \partial_+L[$  (semifechado inferiormente),  $] \partial_-L, \partial_+L]$  (semifechado superiormente) ou  $[ \partial_-L, \partial_+L]$  (fechado). Quando  $\partial_-L = \partial_+L$ , dizemos que o intervalo  $L$  é degenerado e, quando  $\partial_-L < \partial_+L$ , que é não degenerado.

**Definição 3.3** (Bordo de retângulo). Sejam  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d' \in \llbracket d \rrbracket$ ,  $l \in \llbracket d' \rrbracket$ ,  $s \in \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ ,  $R = L^{(0)} \times \dots \times L^{(d-1)} \subseteq \mathbb{R}^d$  um retângulo  $d'$ -dimensional em  $\mathbb{R}^d$ , e  $L^{(n_l)}$  o  $l$ -ésimo intervalo não degenerado entre os intervalos  $L^{(0)}, \dots, L^{(d-1)}$ . A  $l$ -ésima face  $s$  (*superior* se  $s = +1$ /*inferior* se  $s = -1$ ) de  $R$  é o retângulo  $(d' - 1)$ -dimensional

$$\partial_s^{(l)} R := L^{(0, \dots, n_l-1)} \times \{\partial_s L^{(n_l)}\} \times L^{(n_l+1, \dots, d-1)}.$$

O *bordo* de  $R$  é a cadeia de retângulos  $(d' - 1)$ -dimensionais

$$\begin{aligned} \partial R &:= \bigoplus_{l \in \llbracket d' \rrbracket} \bigoplus_{s \in \mathbb{S}^0} (-1)^l s \partial_s^{(l)} R \\ &= \bigoplus_{l \in \llbracket d' \rrbracket} (-1)^l (\partial_+^{(l)} R - \partial_-^{(l)} R). \end{aligned}$$

O *bordo* de uma cadeia de retângulos é definido linearmente.

**Proposição 3.1.** O operador bordo  $\partial$  satisfaz

$$\partial^2 = 0.$$

*Demonstração.* Mostraremos inicialmente a propriedade para um retângulo  $d'$ -dimensional  $R = L^{(0)} \times \dots \times L^{(d-1)}$  em  $\mathbb{R}^d$ . Vamos primeiro mostrar que, para todos  $l \in \llbracket d' \rrbracket$  e  $l' \in \llbracket d' - 1 \rrbracket$  tais que  $l' < l$ , e todos  $s, s' \in \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ , vale

$$(14) \quad \partial_{s'}^{(l')} \circ \partial_s^{(l)}(R) = \partial_s^{(l-1)} \circ \partial_{s'}^{(l')}(R).$$

Sejam  $L^{(n_{l'})}$  e  $L^{(n_l)}$ , respectivamente, o  $l'$ -ésimo e o  $l$ -ésimo intervalos não degenerados de

$$R = L^{(0, \dots, n_{l'}-1)} \times L^{(n_{l'})} \times L^{(n_{l'}+1, \dots, n_l-1)} \times L^{(n_l)} \times L^{(n_l+1, \dots, d-1)}.$$

Como  $l' < l$ , o intervalo  $L^{(n_{l'})}$  também é o  $l'$ -ésimo intervalo não degenerado de

$$\partial_s^{(l)} R = L^{(0, \dots, n_{l'}-1)} \times L^{(n_{l'})} \times L^{(n_{l'}+1, \dots, n_l-1)} \times \{\partial_s L^{(n_l)}\} \times L^{(n_l+1, \dots, d-1)}.$$

Por outro lado, o intervalo  $L^{(n_l)}$  é o  $(l-1)$ -ésimo intervalo não degenerado de

$$\partial_{s'}^{(l')} R = L^{(0, \dots, n_{l'}-1)} \times \{\partial_{s'} L^{(n_{l'})}\} \times L^{(n_{l'}+1, \dots, n_l-1)} \times L^{(n_l)} \times L^{(n_l+1, \dots, d-1)},$$

pois o intervalo  $L^{(n_{l'})}$  não está mais presente nesse produto e vem antes de  $L^{(n_l)}$ . Isso então implica que

$$\begin{aligned} \partial_{s'}^{(l')}(\partial_s^{(l)} R) &= \partial_{s'}^{(l')}(L^{(0, \dots, n_{l'}-1)} \times \{\partial_s L^{(n_l)}\} \times L^{(n_l+1, \dots, d-1)}) \\ &= L^{(0, \dots, n_{l'}-1)} \times \{\partial_{s'} L^{(n_{l'})}\} \times L^{(n_{l'}+1, \dots, n_l-1)} \times \{\partial_s L^{(n_l)}\} \times L^{(n_l+1, \dots, d-1)}. \\ &= \partial_s^{(l-1)}(L^{(0, \dots, n_{l'}-1)} \times \{\partial_{s'} L^{(n_{l'})}\} \times L^{(n_{l'}+1, \dots, d-1)}) \\ &= \partial_s^{(l-1)}(\partial_{s'}^{(l')} R). \end{aligned}$$

Como o bordo de  $R$  é

$$\partial R = \bigoplus_{l \in \llbracket d' \rrbracket} \bigoplus_{s \in \mathbb{S}^0} (-1)^l s \partial_s^{(l)} R,$$

segue por linearidade que

$$\partial^2 R = \bigoplus_{l \in \llbracket d' \rrbracket} \bigoplus_{s \in \mathbb{S}^0} (-1)^l s \partial(\partial_s^{(l)} R).$$

Vamos analisar os termos no somatório. Como a face  $\partial_s^{(l)} R$  é um  $(d' - 1)$ -retângulo, seu bordo é

$$\partial(\partial_s^{(l)} R) = \bigoplus_{l' \in \llbracket d' - 1 \rrbracket} \bigoplus_{s' \in \mathbb{S}^0} (-1)^{l'} s' \partial_{s'}^{(l')}( \partial_s^{(l)} R ).$$

Assim temos que o bordo de  $\partial R$  é

$$\begin{aligned} \partial^2 R &= \bigoplus_{l \in \llbracket d' \rrbracket} \bigoplus_{s \in \mathbb{S}^0} \bigoplus_{l' \in \llbracket d' - 1 \rrbracket} \bigoplus_{s' \in \mathbb{S}^0} (-1)^{l+l'} s s' \partial_{s'}^{(l')}( \partial_s^{(l)} R ) \\ &= \bigoplus_{s, s' \in \mathbb{S}^0} \bigoplus_{(l, l') \in \llbracket d' \rrbracket \times \llbracket d' - 1 \rrbracket} (-1)^{l+l'} s s' \partial_{s'}^{(l')}( \partial_s^{(l)} R ). \end{aligned}$$

Note que podemos particionar o conjunto  $\llbracket d' \rrbracket \times \llbracket d' - 1 \rrbracket$  nos conjuntos

$$D := \{(l, l') \in \llbracket d' \rrbracket \times \llbracket d' - 1 \rrbracket \mid l > l'\}$$

$$D' := \{(l, l') \in \llbracket d' \rrbracket \times \llbracket d' - 1 \rrbracket \mid l \leq l'\}.$$

e que esses conjuntos estão em bijeção pela relação  $(l, l') \leftrightarrow (l', l - 1)$ . Portanto os termos

$$(-1)^{l'+l} s' s \partial_{s'}^{(l')} (\partial_s^{(l)} R)$$

(que ocorre para  $(l, l') \in D$ ) e

$$(-1)^{(l-1)+l'} s' s \partial_s^{(l-1)} (\partial_{s'}^{(l')} R) = -(-1)^{l'+l} s' s \partial_s^{(l-1)} (\partial_{s'}^{(l')} R) = -(-1)^{l'+l} s' s \partial_{s'}^{(l')} (\partial_s^{(l)} R)$$

(que ocorre para  $(l', l - 1) \in D'$ ) são iguais a menos de um sinal (por causa da **FÓRMULA (14)**), logo se cancelam no somatório e concluimos que

$$\partial^2 R = \sum_{s, s' \in S^0} \sum_{(l, l') \in \llbracket d' \rrbracket \times \llbracket d' - 1 \rrbracket} (-1)^{l'+l} s' s \partial_{s'}^{(l')} (\partial_s^{(l)} R) = 0.$$

Como a proposição é válida para todo retângulo, também é válida para cadeias de retângulos, e segue o resultado geral. ■

### Partições retangulares e refinamentos

Vamos usar a seguinte notação para simplificar a exposição: dado  $k = (k_0, \dots, k_{d-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ , denotamos

$$\llbracket k \rrbracket = \llbracket k_0 \rrbracket \times \dots \times \llbracket k_{d-1} \rrbracket.$$

Portanto  $n \in \llbracket k \rrbracket$  significa  $n = (n_0, \dots, n_{d-1})$  e  $n_l \in \llbracket k_l \rrbracket = \{0, \dots, k_l - 1\}$ .

**Definição 3.4.** Sejam  $k = (k_0, \dots, k_{d-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$  um multi-índice e  $R = I^{(0)} \times \dots \times I^{(d-1)} \subseteq \mathbb{R}^d$  um retângulo. Uma *k-partição retangular* de  $R$  é uma (quase-)partição  $P = \{P_n \mid n \in \llbracket k \rrbracket\}$  de  $R$  cujas partes  $P_n$  são retângulos, conjuntos da forma  $P_n = I_n^{(0)} \times \dots \times I_n^{(d-1)}$ .

Uma *k-partição retangular pontuada* de  $R$  é um par  $(P, x)$ , em que  $P$  é uma *k-partição retangular* de  $R$  e  $x = (x_n)_{n \in \llbracket k \rrbracket}$  uma sequência de pontos que satisfaz  $x_n \in P_n$ .

Note que a cardinalidade de uma *k-partição retangular* é  $k_0 \cdots k_{d-1}$ .

### 3.2 Volume no espaço $d$ -dimensional real $\mathbb{R}^d$

Lembremos que, dado  $J \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo real, seu bordo é denotado  $\partial J = \{\partial_- J, \partial_+ J\}$ , sendo  $\partial_- J \leq \partial_+ J$  os extremos inferior e superior de  $J$ , respectivamente. Definimos então o *volume* (ou *comprimento*) de  $J$  por

$$dI(J) = \partial_+ J - \partial_- J.$$

Para um retângulo  $R \subseteq \mathbb{R}^d$  dado pelo produto de intervalos  $R = J^{(0)} \times \dots \times J^{(d-1)}$  seu *volume* é dado por

$$(dI)^d(R) := dI(J^{(0)}) \times \dots \times dI(J^{(d-1)}).$$

### 3.3 Integração de campos multivetoriais

Consideremos um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  e um campo multivetorial  $a : U \rightarrow \mathbb{A}(d)$ . Queremos definir a integral orientada de  $a$  em  $U$ .



**Definição 3.5** (Somadas parciais direcionadas).

$$S_{x \in P|R} a(x) \Delta x := \bigoplus_{n \in \llbracket k \rrbracket} a(x_n) dI(P_n) i_{0, \dots, d-1}.$$

$$S_{x \in P|R} \Delta x a(x) := \bigoplus_{n \in \llbracket k \rrbracket} dI(P_n) i_{0, \dots, d-1} a(x_n).$$

**Definição 3.6** (Integral direcionada).

$$\int_{x \in R} a(x) dx := \lim_{\Theta(P) \rightarrow 0} S_{x \in P} a(x) \Delta x.$$

$$\int_{x \in R} dx a(x) := \lim_{\Theta(P) \rightarrow 0} S_{x \in P} \Delta x a(x).$$

$$\nabla a(x) := \lim_{\Theta(R) \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int_{s \in \partial R} ds f$$

### 3.4 A derivada como variação nas extremidades

Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo real com bordo  $\partial I = \{\partial_- I, \partial_+ I\}$ , sendo  $\partial_- I \leq \partial_+ I$  os extremos inferior e superior, respectivamente; isto é,  $I$  é um intervalo de uma das quatro formas  $] \partial_- I, \partial_+ I[$ ,  $] \partial_- I, \partial_+ I]$ ,  $[ \partial_- I, \partial_+ I[$ , ou  $[ \partial_- I, \partial_+ I]$ .

Consideremos uma função real a valores reais  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, um campo escalar sobre  $I$ . A derivada de  $f$  em um ponto  $x \in I^\circ$  é definida como o limite (caso exista)

$$\frac{df(x)}{dx} := \dot{f}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Uma motivação para esse limite é obter a inclinação (ou coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$  no ponto  $(x, f(x))$  como o limite das inclinações das retas secantes próximas.

A derivada de  $f$  também satisfaz, para todo  $x \in I^\circ$ ,

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h}.$$

Isso mostra que a derivada, além da inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$ , também pode ser vista como o limite da variação média de  $f$  nas extremidades do intervalo  $[x - h/2, x + h/2] \subseteq I$  quando ele tende ao ponto  $x$ . Dessa forma, o Teorema Fundamental do Cálculo é o fato de que, se somamos todas as variações médias pontuais da função  $f$  no intervalo  $I$ , obtemos a variação de  $f$  em  $I$ , ou seja,

$$f(\partial_+ I) - f(\partial_- I) = \int_{x \in I} \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Denotando a diferença  $f(\partial_+ I) - f(\partial_- I)$  como  $\int_{\partial I} f$  (a integral de  $f$  sobre seu bordo  $\partial I$ ) e o integrando  $\frac{df(x)}{dx} dx$  como  $df(x)$  (que deve ser entendido como a derivada exterior da forma  $f$ , ou como a medida diferencial de  $f$ ), o Teorema Fundamental do Cálculo se torna

$$\int_{\partial I} f = \int_I df.$$

Essa forma da igualdade sugere uma relação entre o bordo do intervalo e a derivação exterior da forma: eles são duais.<sup>15</sup> Ela se estende a mais dimensões através do Teorema de Stokes para formas, ou Teorema Fundamental do Cálculo para integração orientada de formas, que estabelece que

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega,$$

em que  $M$  é uma variedade  $d$ -dimensional,  $\partial M$  seu bordo (uma variedade  $(d - 1)$ -dimensional),  $\omega$  é uma  $(d - 1)$ -forma diferencial, e  $d\omega$  sua derivada exterior (uma  $d$ -forma diferencial). Esse teorema generaliza o Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema de Green e o Teorema de Stokes em dimensões 1, 2 e 3 para qualquer dimensão.

### 3.5 Derivada geométrica

Vamos considerar nesta subseção campos multivetoriais: transformações que associam, a cada ponto de um aberto de  $\mathbb{R}^d$  um multivetor.

**Definição 3.7.** Sejam  $d \in \mathbb{N}$  e  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  um aberto. Um *campo multivetorial* em  $U$  é uma transformação  $a : U \rightarrow \mathbb{A}(d)$ .

Com a identificação da álgebra geométrica  $\mathbb{A}(d)$  com o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{2^d}$ , cada transformação  $a : U \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{A}(d)$  pode ser dita  $m$ -diferenciável, fortemente diferenciável, continuamente  $m$ -diferenciável,  $v$ -direcionalmente derivável,  $k$ -parcialmente  $m$ -diferenciável ou, no caso de trajetórias,  $m$ -derivável. Todas essas noções são herdadas do cálculo em espaços normados. Nesta subseção, vamos introduzir o conceito de derivada vetorial, um conceito relacionado com o produto geométrico da álgebra  $\mathbb{A}(d)$ , e relacionaremos esse conceito com os conceitos supracitados.

Vamos definir a derivada vetorial  $\nabla$  através de suas propriedades algébricas elementares. Elas nos indicam que  $\nabla$  age como um vetor com respeito ao produto geométrico, e serão suficientes no momento para entendermos o significado desse conceito em casos simples e clássicos, mas mais adiante também mostraremos uma equivalente definição da derivada vetorial que é em si mais intuitiva, porém exige a definição de integração de campos multivetoriais.

Vamos denotar a *derivada direcional* de  $a$  na direção de  $v$  como

$$\nabla_v a(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(x + tv) - a(x)}{t} = Da|_x(v).$$

Para os vetores da base canônica  $i = (i_0, \dots, i_{d-1})$ , denotamos  $\nabla_h := \nabla_{i_h}$ .

**Definição 3.8.** Sejam  $d \in \mathbb{N}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  um aberto,  $x \in U$  um vetor e  $a : U \rightarrow \mathbb{A}(d)$  um campo multivetorial em  $U$  diferenciável em  $x$ . A *derivada geométrica* de  $a$  em  $x$  é o único multivetor  $\nabla a(x) \in \mathbb{A}(d)$  tal que, para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$v \cdot \nabla a(x) = \nabla_v a(x).$$

Essa definição implica que, dada uma base ordenada  $b = (b_0, \dots, b_{d-1})$  de  $\mathbb{R}^d$ , para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^d$  vale

$$\nabla a(x) = \bigoplus_{h=0}^{d-1} b_h \nabla_{b_h} a(x).$$

15. Ou, mais precisamente, adjuntos, se vemos a integral como pareando um conjunto orientado com uma forma para obter um escalar:  $f(\partial I, f) = f(I, df)$ .

Em particular, para a base canônica  $i = (i_0, \dots, i_{d-1})$  temos

$$\nabla a(x) = \bigoplus_{h=0}^{d-1} i_h \nabla_h a(x).$$

Podemos assim denotar, de modo simplificado,

$$\nabla = \bigoplus_{h=0}^{d-1} b_h \nabla_{b_h} = \bigoplus_{h=0}^{d-1} i_h \nabla_h.$$

Consideremos alguns exemplos de derivação vetorial para alguns casos específicos de campos multivetoriais. Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  um aberto e  $x \in U$  um ponto.

1. (Gradiente de campo escalar) Para um campo escalar  $c : U \rightarrow \mathbb{R}$ , a derivada vetorial de  $c$  em  $x$  é

$$\nabla c(x) = \bigoplus_{h=0}^{d-1} i_h \nabla_{i_h} c(x) = \bigoplus_{h=0}^{d-1} \nabla_h c(x) i_h,$$

que é o campo vetorial tradicionalmente chamado de *gradiente* de  $c$ .

2. (Divergente e rotacional de campo vetorial) Para um campo vetorial  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , a derivada vetorial de  $v$  em  $x$  é

$$\begin{aligned} \nabla v(x) &= \bigoplus_{h_0=0}^{d-1} i_{h_0} \nabla_{h_0} v(x) \\ &= \bigoplus_{h_0=0}^{d-1} i_{h_0} \nabla_{h_0} \left( \bigoplus_{h_1=0}^{d-1} v_{h_1}(x) i_{h_1} \right) \\ &= \bigoplus_{h_0=0}^{d-1} i_{h_0} \left( \bigoplus_{h_1=0}^{d-1} \nabla_{h_0} v_{h_1}(x) i_{h_1} \right) \\ &= \bigoplus_{h_0=0}^{d-1} \bigoplus_{h_1=0}^{d-1} \nabla_{h_0} v_{h_1}(x) i_{h_0} i_{h_1} \\ &= \bigoplus_{h=0}^{d-1} \nabla_h v_h(x) i_h + \bigoplus_{h \in \binom{d}{2}} (\nabla_{h_0} v_{h_1}(x) - \nabla_{h_1} v_{h_0}(x)) i_h. \end{aligned}$$

Denotando o campo escalar tradicionalmente chamado de *divergente* de  $v$  por

$$\nabla \cdot v(x) := \bigoplus_{h=0}^{d-1} \nabla_h v_h(x) i_h$$

e o campo bivetorial cujos coeficientes são os mesmos do campo vetorial que é tradicionalmente chamado de *rotacional* de  $v$  (quando  $d = 3$ ) por

$$\nabla \vee v(x) := \bigoplus_{h \in \binom{d}{2}} (\nabla_{h_0} v_{h_1}(x) - \nabla_{h_1} v_{h_0}(x)) i_h,$$

concluimos que

$$\nabla v(x) = \nabla \cdot v(x) + \nabla \vee v(x).$$