Fluxo de Campos Vetoriais

Pedro G. Mattos

16 de outubro de 2024

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto, $x \in A$ um ponto e $V\colon A \to \mathbb{R}^d$ um campo vetorial ($\mathscr{C}^\infty$, completo?). Denotamos o fluxo de V iniciado em x no tempo $t \in I_x \subseteq \mathbb{R}$ por $\Phi^{tV}(x)$. O fluxo é a função[1]

$$\begin{aligned} \Phi^V\colon\ \mathbb{R} \times A &\longrightarrow A \\ (t, x) &\longmapsto \Phi^{tV}(x). \end{aligned}$$

com a notação escolhida para enfatizar, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função

$$\begin{aligned} \Phi^{tV}\colon\ A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \Phi^{tV}(x), \end{aligned}$$

Se queremos fixar x e considerar somente a órbita de x pelo fluxo de V, escrevemos

$$\phi_x^V(t) := \Phi^{tV}(x)$$

e denotamos essa trajetória por

$$\begin{aligned} \phi_x^V\colon\ I_x &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto \phi_x^V(t) := \Phi^{tV}(x). \end{aligned}$$

A intuição por trás dessa notação se deve ao fato de que o fluxo do campo V satisfaz, para todo $x \in A$ e $t \in I_x$,

$$\begin{aligned} \Phi^{0V}(x) &= x = \mathrm{I}(x) \\ \dot{\Phi}^{tV}(x) &= V(\Phi^{tV}(x)) = V \circ \Phi^{tV}(x), \end{aligned} \tag{1}$$

em que o ponto sobre Φ denotada a derivada temporal (derivada parcial em relação ao tempo t) e $\mathrm{I}: A \to A$ é a função identidade.

Para as órbitas de x pelo fluxo de V, as relações 1 se tornam

$$\begin{aligned} \phi_x^V(0) &= x \\ \dot{\phi}_x^V(t) &= V(\phi_x^V(t)) = V \circ \phi_x^V(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Omitindo x, as relações 1 se tornam

$$\begin{aligned} \Phi^{0V} &= \mathrm{I} \\ \dot{\Phi}^{tV} &= V \circ \Phi^{tV}, \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Essa função nem sempre está definida em todo $\mathbb{R} \times A$, pois para cada $x \in A$ o tem,po está definido em um intervalo I_x. Em geral, ele está definido no conjunto $D_V \coloneqq \bigcup_{x \in A} I_x \times \{x\}$, que é subconjunto de $\mathbb{R} \times A$. Para simplificar a notação, optamos aqui por escrever $\mathbb{R} \times A$ no lugar de D_V.

o que é compatível com o comportamento da função exponencial.

Além disso, vale também que, para t fixo, os campos V e tV estão relacionados por

$$\Phi^{tV}(x) = \Phi^{1(tV)}(x).$$

Também vale que

$$\Phi^{(t+t')V}(x) = \Phi^{tV} \circ \Phi^{t'V}(x)$$

No entanto, a relação $\Phi^{t(V+V')}(x) = \Phi^{tV} \circ \Phi^{tV'}(x)$ nem sempre vale. No caso de grupos de Lie e álgebras de Lie, $\Phi^{tV} \circ \Phi^{tV'}(x)$ é igual ao fluxo de um outro campo vetorial W (ou melhor, outro vetor da álgebra que gera o campo), dado pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$W(V, V') = V + V' + \frac{1}{2}[V, V'] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \cdots .$$

No entanto, para campos vetoriais quaisquer, nem sempre[2] existe outro campo W que satisfaça

$$\Phi^{tV} \circ \Phi^{tV'}(x) = \Phi^{tW}.$$

Mas existe um caso importante em que ela é válida: quando os campos vetoriais V e V' comutam, isto é, $[V, V'] = 0$, então os fluxos também comutam e a equação acima vale para $W = V + V'$.

Proposição 1. *Sejam V e V' campos vetoriais (completos?). Então $[V, V'] = 0$ se, e somente se, para todos $t, t' \in \mathbb{R}$,*

$$\Phi^{tV} \circ \Phi^{t'V'} = \Phi^{t'V'} \circ \Phi^{tV}.$$

Demonstração. Spivak, Differential Geometry vol.1, p. 157. □

Pergunta 1. Quando V é um campo vetorial 1-dimensional em $\mathbb{R}$, os argumentos t do tempo e $V(x)$ do campo são números reais. A notação poderia gerar ambiguidade. Nesse caso, sempre vale $[V, V'] = 0$? Existe alguma ambiguidade?

Consideremos agora uma função estritamente positiva $f : A \to \mathbb{R}_{>0}$. Os fluxos de V e fV se relacionam da seguinte maneira.

Proposição 2. *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto, $x \in A$ um ponto, $V : A \to \mathbb{R}^d$ um campo vetorial ($\mathscr{C}^\infty$, completo?) e $f : A \to \mathbb{R}_{>0}$ uma função estritamente positiva. Então os campos V e fV são orbitalmente equivalentes[3] e o fluxo do campo fV no tempo t e ponto x é dado por*

$$\Phi^{t(fV)}(x) = \Phi^{(\phi_0^{f\circ\phi_x^V}(t))V}(x).$$

Explicitamente, $T(t) := \phi_0^{f\circ\phi_x^V}(t)$ é a reparametrização da órbita no ponto x e vale

$$\phi_x^{fV} = \phi_X^V \circ \phi_0^{f\circ\phi_x^V} = \phi_x^V \circ T.$$

Demonstração. A trajetória ϕ_x^V é a órbita de um ponto $x \in M$ pelo campo V. Podemos portanto considerar o valor de f ao longo da trajetória de x pelo fluxo de V, que define um campo unidimensional

$$\begin{aligned} f \circ \phi_x^V : I_{x_0} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ t &\longmapsto f(\phi_x^V(t)) = f(\Phi^{tV}(x)), \end{aligned}$$

[2] https://mathoverflow.net/questions/18753/does-the-baker-campbell-hausdorff-formula-hold-for-vector-fields-on-a-compact

[3] A óbita de um ponto em um campo é a mesma que no outro campo a menos de uma reparametrização do tempo.

A trajetória de um $c \in \mathbb{R}$ por esse campo é

$$T(t) \coloneqq \phi_c^{f \circ \phi_x^V}(t) = \Phi^{t(f \circ \phi_x^V)}(c)$$

e satisfaz

$$\dot{T}(t) = \dot{\Phi}^{t(f \circ \phi_x^V)}(c) = (f \circ \phi_x^V) \circ \Phi^{t(f \circ \phi_x^V)}(c) = f \circ \phi_x^V \circ T(t). \tag{4}$$

Note que T depende do ponto x e também de c. No entanto, queremos uma reparametrização T satisfazendo $T(0) = 0$, portanto tomamos $c = 0$, já que

$$T(0) = \Phi^{0(f \circ \phi_x^V)}(c) = c.$$

Pela regra da cadeia, segue de 4 e 2 que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_x^V \circ T)(t) &= \dot{T}(t) \cdot \dot{\phi}_x^V(T(t)) \\
&= (f \circ \phi_x^V \circ T(t)) \cdot (V \circ \phi_X^V(T(t))) \\
&= f(\phi_x^V \circ T(t)) \cdot V(\phi_x^V \circ T(t)) \\
&= (fV)(\phi_x^V \circ T(t)).
\end{aligned}$$

Como (por tomarmos $c = 0$) vale que

$$\phi_x^{fV}(0) = 0 = \phi_x^V(0) = \phi_x^V \circ T(0),$$

segue da unicidade de solução para o campo fV que a trajetória de x pelo fluxo de fV é

$$\phi_x^{fV} = \phi_x^V \circ T = \phi_X^V \circ \phi_0^{f \circ \phi_x^V}. \tag{5}$$

e portanto os campos V e fV são orbitalmente equivalentes. Por fim, reescrevendo 5 em termos do fluxo, concluímos que o fluxo de fV no ponto x e tempo t é dado por

$$\Phi^{t(fV)}(x) = \Phi^{T(t)V}(x) = \Phi^{(\phi_0^{f \circ \phi_x^V}(t))V}(x).$$

$\square$