

Entropia em Sistemas Dinâmicos

Pedro G. Mattos
pedrogmattos@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

I Encontro Paulista da Pós-Graduação em Matemáticas
10 de fevereiro de 2022



Sumário

1. Entropia métrica
2. Entropia topológica
3. Entropia uniforme
4. Artigo de Y. Zang

Seção 1

Entropia métrica

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{M}, m)$

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{M}, m)$
- uma função $f : X \longrightarrow X$ que preserva medida:

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{M}, m)$
- uma função $f: X \longrightarrow X$ que preserva medida:
 - $f^{-1}(M) \in \mathcal{M}$ para todo mensurável $M \in \mathcal{M}$

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{M}, m)$
- uma função $f: X \longrightarrow X$ que preserva medida:
 - $f^{-1}(M) \in \mathcal{M}$ para todo mensurável $M \in \mathcal{M}$
 - $m(f^{-1}(M)) = m(M)$ para todo mensurável $M \in \mathcal{M}$

Subseção 1

Partições mensuráveis

Partições mensuráveis

Definição

Uma *partição mensurável* de X

Partições mensuráveis

Definição

Uma *partição mensurável* de X é $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$

Partições mensuráveis

Definição

Uma *partição mensurável* de X é $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

1. $X = \bigcup \mathcal{P}$;

Partições mensuráveis

Definição

Uma *partição mensurável* de X é $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

1. $X = \bigcup \mathcal{P}$;
2. $\emptyset \notin \mathcal{P}$;

Partições mensuráveis

Definição

Uma *partição mensurável* de X é $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

1. $X = \bigcup \mathcal{P}$;
2. $\emptyset \notin \mathcal{P}$;
3. Para todos $P, P' \in \mathcal{P}$, se $P \neq P'$ então $P \cap P' = \emptyset$.

Partições mensuráveis

Definição

Uma *partição mensurável* de X é $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

1. $X = \bigcup \mathcal{P}$;
2. $\emptyset \notin \mathcal{P}$;
3. Para todos $P, P' \in \mathcal{P}$, se $P \neq P'$ então $P \cap P' = \emptyset$.

Consideraremos somente partições finitas.

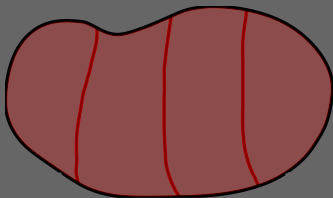
Partições mensuráveis

Definição

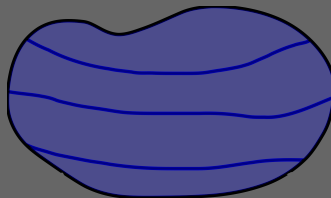
Uma *partição mensurável* de X é $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

1. $X = \bigcup \mathcal{P}$;
2. $\emptyset \notin \mathcal{P}$;
3. Para todos $P, P' \in \mathcal{P}$, se $P \neq P'$ então $P \cap P' = \emptyset$.

Consideraremos somente partições finitas.



(A) Uma partição



(B) Outra partição

Refinamento de partição

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{P}$

Refinamento de partição

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{P}$ é uma partição $\mathcal{P}'$

Refinamento de partição

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{P}$ é uma partição $\mathcal{P}'$ tal que

- para todo $P' \in \mathcal{P}'$, algum $P \in \mathcal{P}$ satisfaz $P' \subset P$.

Refinamento de partição

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{P}$ é uma partição $\mathcal{P}'$ tal que

- para todo $P' \in \mathcal{P}'$, algum $P \in \mathcal{P}$ satisfaz $P' \subset P$.

Denota-se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$.

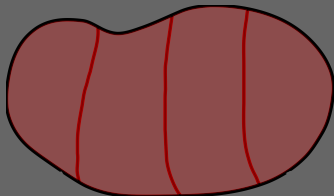
Refinamento de partição

Definição

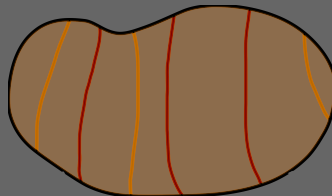
Um *refinamento* de $\mathcal{P}$ é uma partição $\mathcal{P}'$ tal que

- para todo $P' \in \mathcal{P}'$, algum $P \in \mathcal{P}$ satisfaz $P' \subset P$.

Denota-se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$.



(A) Partição $\mathcal{P}$



(B) Refinamento $\mathcal{P}'$

Correfinamento de partição

Definição

O *correfinamento* de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$

Correfinamento de partição

Definição

O *correfinamento* de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{P}' := \{P \cap P' \mid P \in \mathcal{P}, P' \in \mathcal{P}'\} \setminus \{\emptyset\}.$$

Correfinamento de partição

Definição

O *correfinamento* de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{P}' := \{P \cap P' \mid P \in \mathcal{P}, P' \in \mathcal{P}'\} \setminus \{\emptyset\}.$$

O correfinamento pode ser calculado repetidas vezes (associatividade).

Correfinamento de partição

Definição

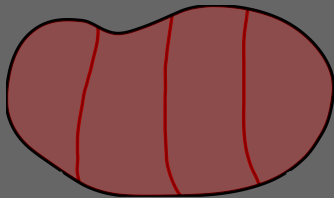
O *correfinamento* de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{P}' := \{P \cap P' \mid P \in \mathcal{P}, P' \in \mathcal{P}'\} \setminus \{\emptyset\}.$$

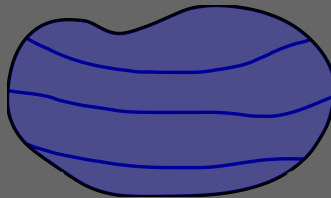
O correfinamento pode ser calculado repetidas vezes (associatividade). Denota-se

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_{n-1}.$$

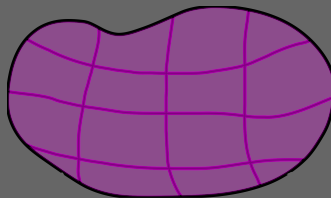
Correfinamento de partição



(A) Partição $\mathcal{P}$



(B) Partição $\mathcal{P}'$



(C) Partição $\mathcal{P} \vee \mathcal{P}'$

Subseção 2

Entropia de uma partição

Entropia de partição

Definição

A *entropia* da partição $\mathcal{P}$

Entropia de partição

Definição

A *entropia* da partição $\mathcal{P}$ é

$$H_m(\mathcal{P}) := - \sum_{P \in \mathcal{P}} m(P) \log(m(P)).$$

Entropia de partição

Definição

A *entropia* da partição $\mathcal{P}$ é

$$H_m(\mathcal{P}) := - \sum_{P \in \mathcal{P}} m(P) \log(m(P)).$$

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $H_m(\mathcal{P}) \leq H_m(\mathcal{P}')$;

Entropia de partição

Definição

A *entropia* da partição $\mathcal{P}$ é

$$H_m(\mathcal{P}) := - \sum_{P \in \mathcal{P}} m(P) \log(m(P)).$$

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $H_m(\mathcal{P}) \leq H_m(\mathcal{P}')$;
2. $H_m(\mathcal{P} \vee \mathcal{P}') \leq H_m(\mathcal{P}) + H_m(\mathcal{P}')$.

Subseção 3

Entropia de um sistema

Partição puxada

Definição

A *partição puxada* de $\mathcal{P}$ por f

Partição puxada

Definição

A *partição puxada* de $\mathcal{P}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{P}) := \left\{ f^{-1}(P) \mid P \in \mathcal{P} \right\}.$$

Partição puxada

Definição

A *partição puxada* de $\mathcal{P}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{P}) := \left\{ f^{-1}(P) \mid P \in \mathcal{P} \right\}.$$

Note que $x \in f^{-1}(P)$ significa que $f(x) \in P$.

Partição puxada

Definição

A *partição puxada* de $\mathcal{P}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{P}) := \left\{ f^{-1}(P) \mid P \in \mathcal{P} \right\}.$$

Note que $x \in f^{-1}(P)$ significa que $f(x) \in P$.

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $f^{-1}(\mathcal{P}) \preceq f^{-1}(\mathcal{P}')$;

Partição puxada

Definição

A *partição puxada* de $\mathcal{P}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{P}) := \left\{ f^{-1}(P) \mid P \in \mathcal{P} \right\}.$$

Note que $x \in f^{-1}(P)$ significa que $f(x) \in P$.

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $f^{-1}(\mathcal{P}) \preceq f^{-1}(\mathcal{P}')$;
2. $f^{-1}(\mathcal{P} \vee \mathcal{P}') = f^{-1}(\mathcal{P}) \vee f^{-1}(\mathcal{P}')$;

Partição puxada

Definição

A *partição puxada* de $\mathcal{P}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{P}) := \left\{ f^{-1}(P) \mid P \in \mathcal{P} \right\}.$$

Note que $x \in f^{-1}(P)$ significa que $f(x) \in P$.

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $f^{-1}(\mathcal{P}) \preceq f^{-1}(\mathcal{P}')$;
2. $f^{-1}(\mathcal{P} \vee \mathcal{P}') = f^{-1}(\mathcal{P}) \vee f^{-1}(\mathcal{P}')$;
3. $H_m(f^{-1}(\mathcal{P})) = H_m(\mathcal{P})$.

Correfinamento dinâmico

Definição

O *n*-ésimo correfinamento dinâmico de $\mathcal{P}$ (para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Correfinamento dinâmico

Definição

O n -ésimo correfinamento dinâmico de $\mathcal{P}$ (para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) é

$$\mathcal{P}_f^{[n]} := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Correfinamento dinâmico

Definição

O n -ésimo correfinamento dinâmico de $\mathcal{P}$ (para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) é

$$\mathcal{P}_f^{[n]} := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Note que

$$x \in P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(P_{i_{n-1}})$$

Correfinamento dinâmico

Definição

O n -ésimo correfinamento dinâmico de $\mathcal{P}$ (para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) é

$$\mathcal{P}_f^{[n]} := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Note que

$$x \in P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(P_{i_{n-1}})$$

significa que

$$x \in P_{i_0}, f(x) \in P_{i_1}, \dots, f^{n-1}(x) \in P_{i_{n-1}}.$$

Entropia do sistema relativa a partição

Definição

A *entropia métrica* de f com respeito a $\mathcal{P}$

Entropia do sistema relativa a partição

Definição

A *entropia métrica* de f com respeito a $\mathcal{P}$ é

$$h_m(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_m(\mathcal{P}_f^{[n]}).$$

Entropia do sistema relativa a partição

Definição

A *entropia métrica* de f com respeito a $\mathcal{P}$ é

$$h_m(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_m(\mathcal{P}_f^{[n]}).$$

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $h_m(f, \mathcal{P}) \leq h_m(f, \mathcal{P}')$;

Entropia do sistema relativa a partição

Definição

A *entropia métrica* de f com respeito a $\mathcal{P}$ é

$$h_m(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_m(\mathcal{P}_f^{[n]}).$$

Proposição

1. Se $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, então $h_m(f, \mathcal{P}) \leq h_m(f, \mathcal{P}')$;
2. $h_m(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{P}') \leq h_m(f, \mathcal{P}) + h_m(f, \mathcal{P}')$.

Entropia do sistema

Definição

A *entropia métrica* de f

Entropia do sistema

Definição

A *entropia métrica* de f é

$$h_m(f) := \sup_{\mathcal{P}} h_m(f, \mathcal{P}).$$

Entropia do sistema

Definição

A *entropia métrica* de f é

$$h_m(f) := \sup_{\mathcal{P}} h_m(f, \mathcal{P}).$$

Isso significa que

$$h_m(f) := \sup_{\mathcal{P}} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \sum_{P \in \mathcal{P}_f^{[n]}} m(P) \log(m(P)).$$

Lei de expoentes da entropia

Proposição

1. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $h_m(f^k) = kh_m(f)$;

Lei de expoentes da entropia

Proposição

1. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $h_m(f^k) = kh_m(f)$;
2. Se f é invertível, $h_m(f^{-1}) = h_m(f)$.

Seção 2

Entropia topológica

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ compacto

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ compacto
- uma função $f: X \longrightarrow X$ contínua

Subseção 1

Coberturas abertas

Coberturas abertas

Definição

Uma *cobertura aberta* de X

Coberturas abertas

Definição

Uma *cobertura aberta* de X é $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

Coberturas abertas

Definição

Uma *cobertura aberta* de X é $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$.

Coberturas abertas

Definição

Uma *cobertura aberta* de X é $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$

Coberturas abertas

Definição

Uma *cobertura aberta* de X é $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{S}$

Coberturas abertas

Definição

Uma *cobertura aberta* de X é $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$.

Coberturas abertas

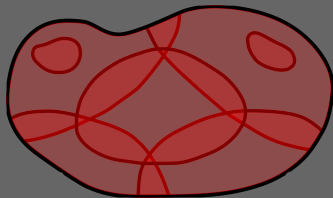
Definição

Uma *cobertura aberta* de X é $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$.

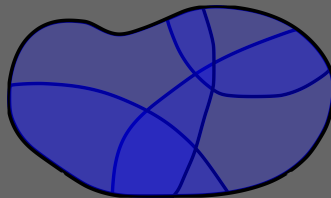
Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$.

Consideraremos somente coberturas finitas.

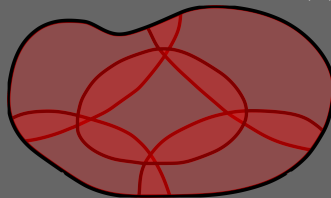
Coberturas abertas



(A) Uma cobertura



(B) Outra cobertura



(C) Uma subcobertura

Refinamento de cobertura

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{C}$

Refinamento de cobertura

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{C}'$

Refinamento de cobertura

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{C}'$ tal que

- para todo $C' \in \mathcal{C}'$, algum $C \in \mathcal{C}$ satisfaz $C' \subseteq C$.

Refinamento de cobertura

Definição

Um *refinamento* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{C}'$ tal que

- para todo $C' \in \mathcal{C}'$, algum $C \in \mathcal{C}$ satisfaz $C' \subseteq C$.

Denota-se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$.

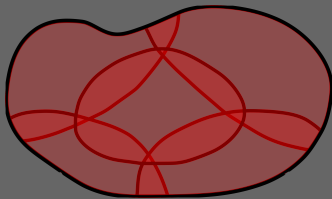
Refinamento de cobertura

Definição

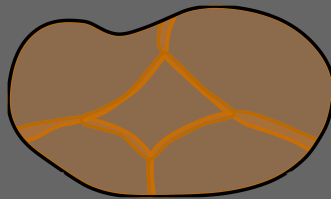
Um *refinamento* de $\mathcal{C}$ é uma cobertura $\mathcal{C}'$ tal que

- para todo $C' \in \mathcal{C}'$, algum $C \in \mathcal{C}$ satisfaz $C' \subseteq C$.

Denota-se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$.



(A) Cobertura $\mathcal{C}$



(B) Refinamento $\mathcal{C}'$

Corefinamento de cobertura

Definição

O *corefinamento* de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$

Corefinamento de cobertura

Definição

O *corefinamento* de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{C}' := \{C \cap C' \mid C \in \mathcal{C}, C' \in \mathcal{C}'\}.$$

Corefinamento de cobertura

Definição

O *corefinamento* de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{C}' := \{C \cap C' \mid C \in \mathcal{C}, C' \in \mathcal{C}'\}.$$

O corefinamento pode ser calculado repetidas vezes (associatividade).

Corefinamento de cobertura

Definição

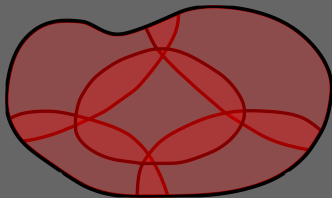
O *corefinamento* de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{C}' := \{C \cap C' \mid C \in \mathcal{C}, C' \in \mathcal{C}'\}.$$

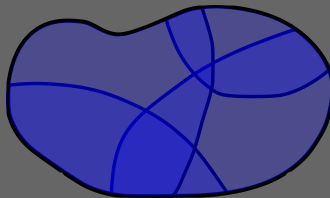
O corefinamento pode ser calculado repetidas vezes (associatividade). Denota-se

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_0 \vee \cdots \vee \mathcal{C}_{n-1}.$$

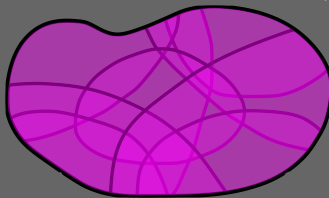
Corefinamento de cobertura



(A) Cobertura $\mathcal{C}$



(B) Cobertura $\mathcal{C}'$



(C) Correfinamento $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$

Subseção 2

Entropia de uma cobertura

Número mínimo de subcobertura

Definição

O *número mínimo de subcobertura* de $\mathcal{C}$

Número mínimo de subcobertura

Definição

O *número mínimo de subcobertura* de $\mathcal{C}$ é

$$N(\mathcal{C}) := \min \{ \#(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \}.$$

Número mínimo de subcobertura

Definição

O *número mínimo de subcobertura* de $\mathcal{C}$ é

$$N(\mathcal{C}) := \min \{ \#(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \}.$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $N(\mathcal{C}) \leq N(\mathcal{C}')$;

Número mínimo de subcobertura

Definição

O *número mínimo de subcobertura* de $\mathcal{C}$ é

$$N(\mathcal{C}) := \min \{ \#(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \}.$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $N(\mathcal{C}) \leq N(\mathcal{C}')$;
2. $N(\mathcal{C} \vee \mathcal{C}') \leq N(\mathcal{C})N(\mathcal{C}')$.

Entropia de cobertura

Definição

A *entropia* de $\mathcal{C}$

Entropia de cobertura

Definição

A *entropia* de $\mathcal{C}$ é

$$H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) := \log(N(\mathcal{C})).$$

Entropia de cobertura

Definição

A *entropia* de $\mathcal{C}$ é

$$H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) := \log(N(\mathcal{C})).$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \leq H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}')$;

Entropia de cobertura

Definição

A *entropia* de $\mathcal{C}$ é

$$H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) := \log(N(\mathcal{C})).$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \leq H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}')$;
2. $H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C} \vee \mathcal{C}') \leq H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) + H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}')$.

Subseção 3

Entropia de um sistema

Cobertura puxada

Definição

A cobertura puxada de $\mathcal{C}$ por f

Cobertura puxada

Definição

A *cobertura puxada* de $\mathcal{C}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \left\{ f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C} \right\}.$$

Cobertura puxada

Definição

A *cobertura puxada* de $\mathcal{C}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \left\{ f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C} \right\}.$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $f^{-1}(\mathcal{C}) \preceq f^{-1}(\mathcal{C}')$;

Cobertura puxada

Definição

A *cobertura puxada* de $\mathcal{C}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $f^{-1}(\mathcal{C}) \preceq f^{-1}(\mathcal{C}')$;
2. $f^{-1}(\mathcal{C} \vee \mathcal{C}') = f^{-1}(\mathcal{C}) \vee f^{-1}(\mathcal{C}')$;

Cobertura puxada

Definição

A *cobertura puxada* de $\mathcal{C}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $f^{-1}(\mathcal{C}) \preceq f^{-1}(\mathcal{C}')$;
2. $f^{-1}(\mathcal{C} \vee \mathcal{C}') = f^{-1}(\mathcal{C}) \vee f^{-1}(\mathcal{C}')$;
3. $H_{\mathcal{T}}(f^{-1}(\mathcal{C})) \leq H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$;

Cobertura puxada

Definição

A *cobertura puxada* de $\mathcal{C}$ por f é

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição

1. Se $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$, então $f^{-1}(\mathcal{C}) \preceq f^{-1}(\mathcal{C}')$;
2. $f^{-1}(\mathcal{C} \vee \mathcal{C}') = f^{-1}(\mathcal{C}) \vee f^{-1}(\mathcal{C}')$;
3. $H_{\mathcal{T}}(f^{-1}(\mathcal{C})) \leq H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$;
4. $H_{\mathcal{T}}(f^{-1}(\mathcal{C})) = H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$ se f é sobrejetiva.

Correfinamento dinâmico

Definição

O *n*-ésimo correfinamento dinâmico de $\mathcal{C}$ (para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Correfinamento dinâmico

Definição

O n -ésimo correfinamento dinâmico de $\mathcal{C}$ (para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) é

$$\mathcal{C}_f^{[n]} := \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{C}).$$

Entropia do sistema relativa a cobertura

Definição

A *entropia topológica* de f com respeito a $\mathcal{C}$

Entropia do sistema relativa a cobertura

Definição

A *entropia topológica* de f com respeito a $\mathcal{C}$ é

$$h_{\mathcal{T}}(f, \mathcal{C}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}_f^{[n]}).$$

Entropia do sistema

Definição

A entropia topológica de f

Entropia do sistema

Definição

A *entropia topológica* de f é

$$h_{\mathcal{T}}(f) := \sup_{\mathcal{C}} h_{\mathcal{T}}(f, \mathcal{C}).$$

Entropia do sistema

Definição

A *entropia topológica* de f é

$$h_{\mathcal{T}}(f) := \sup_{\mathcal{C}} h_{\mathcal{T}}(f, \mathcal{C}).$$

Isso significa que

$$h_{\mathcal{T}}(f) = \sup_{\mathcal{C}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\mathcal{C}_f^{[n]})).$$

Lei de expoentes da entropia

Proposição

1. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $h_{\mathcal{T}}(f^k) = kh_{\mathcal{T}}(f)$;

Lei de expoentes da entropia

Proposição

1. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $h_{\mathcal{T}}(f^k) = kh_{\mathcal{T}}(f)$;
2. Se f for homeomorfismo, $h_{\mathcal{T}}(f^{-1}) = h_{\mathcal{T}}(f)$.

Invariância topológica da entropia

Proposição

Sejam $f: X \longrightarrow X$ e $f': X' \longrightarrow X'$ sistemas dinâmicos topológicos compactos

Invariância topológica da entropia

Proposição

Sejam $f: X \longrightarrow X$ e $f': X' \longrightarrow X'$ sistemas dinâmicos topológicos compactos e $\phi: X' \longrightarrow X$ uma semiconjugação topológica.

Invariância topológica da entropia

Proposição

Sejam $f: X \longrightarrow X$ e $f': X' \longrightarrow X'$ sistemas dinâmicos topológicos compactos e $\phi: X' \longrightarrow X$ uma semiconjugação topológica.

$$h_{\mathcal{T}'}(f') \geq h_{\mathcal{T}}(f).$$

Invariância topológica da entropia

Proposição

Sejam $f: X \longrightarrow X$ e $f': X' \longrightarrow X'$ sistemas dinâmicos topológicos compactos e $\phi: X' \longrightarrow X$ uma semiconjugação topológica.

$$h_{\mathcal{T}'}(f') \geq h_{\mathcal{T}}(f).$$

Se ϕ é homeomorfismo,

$$h_{\mathcal{T}'}(f') = h_{\mathcal{T}}(f).$$

Seção 3

Entropia uniforme

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço métrico (M, d) (compacto)

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- um espaço métrico (M, d) (compacto)
- uma função $f: M \longrightarrow M$ (uniformemente) contínua

Subseção 1

Bolas dinâmicas

Bolas dinâmicas

Definição

A *bola dinâmica* de centro $p \in M$, raio $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ e ordem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Bolas dinâmicas

Definição

A *bola dinâmica* de centro $p \in M$, raio $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ e ordem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é

$$B_f^n(p; \varepsilon) := \left\{ p' \in M \mid \forall_{i \in \{0, \dots, n-1\}} d(f^i(p), f^i(p')) < \varepsilon \right\}.$$

Bolas dinâmicas

Definição

A *bola dinâmica* de centro $p \in M$, raio $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ e ordem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é

$$B_f^n(p; \varepsilon) := \left\{ p' \in M \mid \forall_{i \in \{0, \dots, n-1\}} d(f^i(p), f^i(p')) < \varepsilon \right\}.$$

Vale

$$B_f^n(p; \varepsilon) = \bigcap_{i \in [n]} f^{-i} \left(B \left(f^i(p); \varepsilon \right) \right).$$

Conjuntos geradores

Definição

Sejam $K \subseteq M$ compacto, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Conjuntos geradores

Definição

Sejam $K \subseteq M$ compacto, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Um (n, ε) -gerador de K

Conjuntos geradores

Definição

Sejam $K \subseteq M$ compacto, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Um (n, ε) -gerador de K é $G \subseteq M$

Conjuntos geradores

Definição

Sejam $K \subseteq M$ compacto, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Um (n, ε) -gerador de K é $G \subseteq M$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{p \in G} B_f^n(p; \varepsilon).$$

Conjuntos geradores

Definição

Sejam $K \subseteq M$ compacto, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Um (n, ε) -gerador de K é $G \subseteq M$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{p \in G} B_f^n(p; \varepsilon).$$

Diz-se que G (n, ε) -gera K .

Conjuntos geradores

Definição

Sejam $K \subseteq M$ compacto, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Um (n, ε) -gerador de K é $G \subseteq M$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{p \in G} B_f^n(p; \varepsilon).$$

Diz-se que G (n, ε) -gera K .

Definimos

$$g^n(f, K, \varepsilon) := \min \{ \#(G) \mid G \text{ } (n, \varepsilon)\text{-gera } K \}.$$

Entropia uniforme

Definição

A entropia uniforme ε -imprecisa de f com respeito a K

Entropia uniforme

Definição

A entropia uniforme ε -imprecisa de f com respeito a K é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g^n(f, K, \varepsilon).$$

Entropia uniforme

Definição

A *entropia uniforme ε -imprecisa de f com respeito a K* é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g^n(f, K, \varepsilon).$$

A *entropia uniforme de f com respeito a K*

Entropia uniforme

Definição

A entropia uniforme ε -imprecisa de f com respeito a K é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g^n(f, K, \varepsilon).$$

A entropia uniforme de f com respeito a K é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon).$$

Entropia uniforme

Definição

A entropia uniforme ε -imprecisa de f com respeito a K é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g^n(f, K, \varepsilon).$$

A entropia uniforme de f com respeito a K é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon).$$

A entropia uniforme de f

Entropia uniforme

Definição

A *entropia uniforme ε -imprecisa de f com respeito a K* é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g^n(f, K, \varepsilon).$$

A *entropia uniforme de f com respeito a K* é

$$h_{\mathcal{U}}(f, K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\mathcal{U}}(f, K, \varepsilon).$$

A *entropia uniforme de f* é

$$h_{\mathcal{U}}(f) := \sup_{K \subseteq M \text{ compacto}} h_{\mathcal{U}}(f, K).$$

Subseção 2

Relações entre entropias

Igualdade de entropias topológica e uniforme

No contexto de um espaço métrico compacto e uma função uniformemente contínua

Igualdade de entropias topológica e uniforme

No contexto de um espaço métrico compacto e uma função uniformemente contínua, vale

$$h_{\mathcal{T}}(f) = h_{\mathcal{U}}(f).$$

Princípio variacional

Teorema

Sejam (M, d) espaço métrico compacto.

Princípio variacional

Teorema

Sejam (M, d) espaço métrico compacto.

$$h_{\mathcal{T}}(f) = \sup_m h_m(f),$$

em que as medidas m variam entre as medidas borelianas preservadas por f .

Seção 4

Artigo de Y. Zang

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- uma variedade compacta M

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- uma variedade compacta M
- um $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo $f: M \longrightarrow M$

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- uma variedade compacta M
- um $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo $f: M \longrightarrow M$
- uma medida de probabilidade ergódica m

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- uma variedade compacta M
- um $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo $f: M \longrightarrow M$
- uma medida de probabilidade ergódica m

Denotamos os expoentes de Liapunov positivos por

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_u$$

Contexto

Nesta seção, consideramos um sistema dinâmico composto por

- uma variedade compacta M
- um $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo $f: M \longrightarrow M$
- uma medida de probabilidade ergódica m

Denotamos os expoentes de Liapunov positivos por

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_u$$

e cada subvariedade instável local $W_\rho^i(x)$.

Teorema principal

O *crescimento volumétrico inferior* de uma subvariedade $S \subseteq M$

Teorema principal

O *crescimento volumétrico inferior* de uma subvariedade $S \subseteq M$ é

$$\underline{v}(f, S) := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+(\text{vol}(f^n(S))).$$

Teorema principal

O *crescimento volumétrico inferior* de uma subvariedade $S \subseteq M$ é

$$\underline{v}(f, S) := \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+(\text{vol}(f^n(S))).$$

O *crescimento volumétrico inferior* de W^i (em m -quase toda parte)

Teorema principal

O *crescimento volumétrico inferior* de uma subvariedade $S \subseteq M$ é

$$\underline{v}(f, S) := \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+(\text{vol}(f^n(S))).$$

O *crescimento volumétrico inferior* de W^i (em m -quase toda parte) é

$$\underline{v}_i(f, m) := \inf_{\rho} \underline{v}(f, W_{\rho}^i(x)).$$

Teorema principal

O *crescimento volumétrico inferior* de uma subvariedade $S \subseteq M$ é

$$\underline{v}(f, S) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+(\text{vol}(f^n(S))).$$

O *crescimento volumétrico inferior* de W^i (em m -quase toda parte) é

$$\underline{v}_i(f, m) := \inf_{\rho} \underline{v}(f, W_{\rho}^i(x)).$$

Teorema

$$h_m(f) \leq \underline{v}_i(f, m) + \sum_{j=i+1}^u \lambda_j \gamma_j.$$

Referências I

- [AKM65] R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew. “Topological Entropy”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 114 (1965), pp. 309–319.
- [Bow08] Rufus Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. 2ª ed. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [Bow71] Rufus Bowen. “Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 153 (1971), pp. 401–414.
- [Kol59] A. N. Kolmogorov. “New Metric Invariant of Transitive Dynamical Systems and Endomorphisms of Lebesgue Spaces”. Em: *Doklady of Russian Academy of Sciences* 119 (1959), pp. 861–864.

Referências II

- [Sha48] Claude E. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”. Em: *The Bell System Technical Journal* 27.3 (1948), pp. 379–423.
- [Sin59] Ya. G. Sinai. “On the Notion of Entropy of a Dynamical System”. Em: *Doklady of Russian Academy of Sciences* 124 (1959), pp. 768–771.
- [VO19] Marcelo Viana e Krerley Oliveira. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 2ª ed. Fronteiras da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. ISBN: 978-85-8337-119-9.
- [Zan21] Yuntao Zang. “Entropies and Volume Growth of Unstable Manifolds”. Em: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2021), pp. 1–15.