



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica



Pedro G. Mattos
pedrogmattos@ime.unicamp.br

Entropias de Dobra e de Medida de Zip Shifts

Apresentação na UFV
International Mathematics Days V
08 de maio de 2026

N. Martins, P. G. Mattos e R. Varão. “Folding and Metric Entropies for Extended Shifts”. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2026) [3]

Journal of Dynamics and Differential Equations
<https://doi.org/10.1007/s10884-025-10479-7>



Folding and Metric Entropies for Extended Shifts

Neemias Martins¹ · Pedro G. Mattos² · Régis Varão²

Received: 11 August 2025 / Revised: 21 November 2025 / Accepted: 21 December 2025

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2026

Abstract

In this paper we calculate the metric and folding entropies for a family of non-invertible symbolic dynamical systems $(\Sigma_{m-, m+}, \sigma_\phi)$ which generalizes the standard bilateral Bernoulli shifts. The space $\Sigma_{m-, m+}$ consists of symbolic sequences over two distinct finite alphabets, with dynamics governed by a shift map σ_ϕ incorporating a non-invertible function ϕ that maps one of the alphabets to the other one. These systems are, for instance, particularly useful for encoding the many-to-one baker's transformation endomorphisms, and they can also be seen as a skew product with a unilateral Bernoulli shift on the base.

Keywords Metric entropy · Folding entropy · Extended shifts · Disintegration

Mathematics Subject Classification Primary: 37A35; Secondary: 37B10

Contents

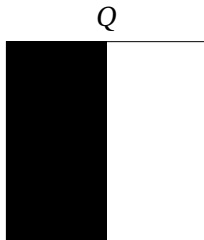
1. Shifts bilaterais
2. Zip shifts
3. Entropia de medida
4. Entropia de dobra

Section 1

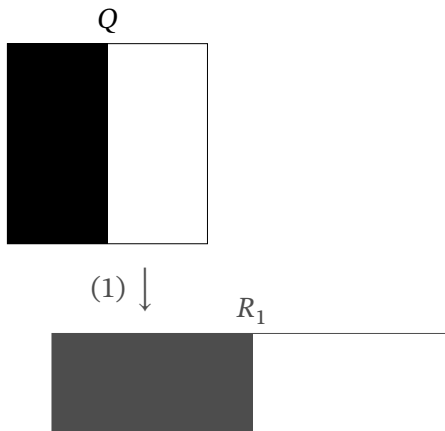
Shifts bilaterais

Transformação do padeiro

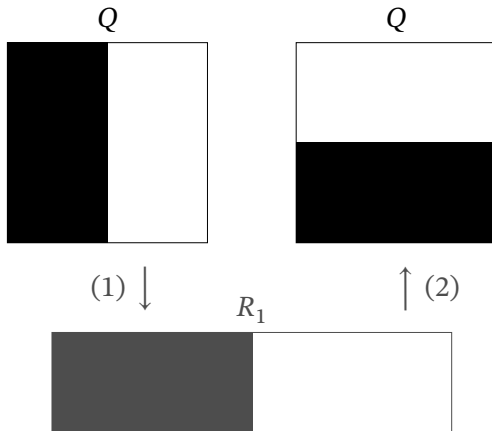
Transformação do padeiro



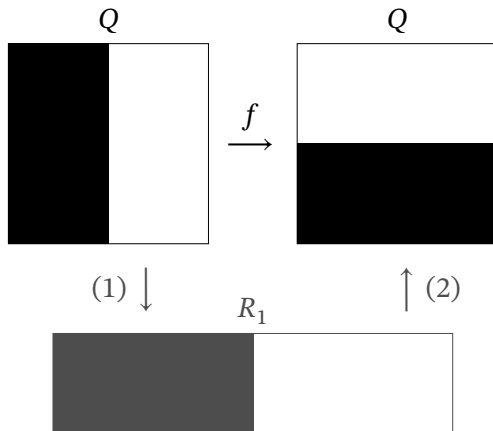
Transformação do padeiro



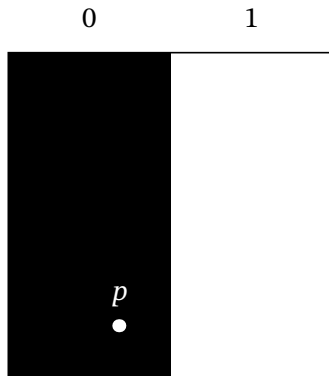
Transformação do padeiro



Transformação do padeiro

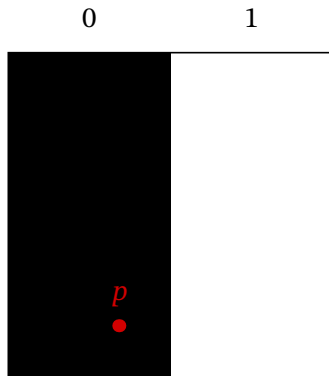


Codificação simbólica



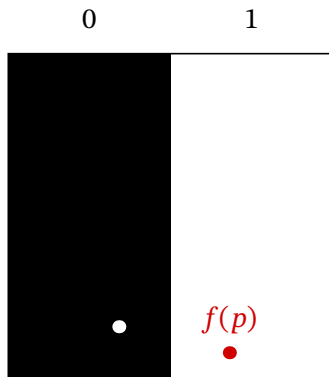
$(\dots, x_{-1}; x_0, x_1, x_2, \dots)$

Codificação simbólica



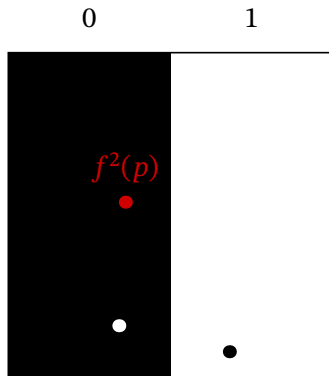
$(\dots, x_{-1}; \textcolor{red}{0}, x_1, x_2, \dots)$

Codificação simbólica



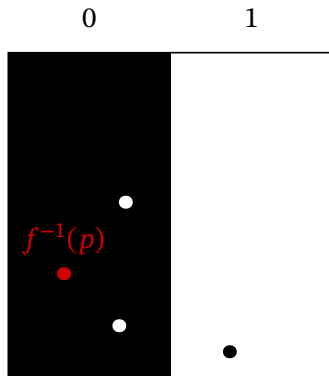
$(\dots, x_{-1}; 0, \textcolor{red}{1}, x_2, \dots)$

Codificação simbólica



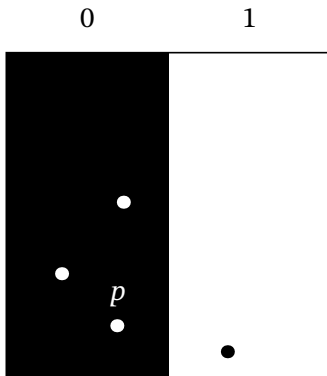
$(\dots, x_{-1}; 0, 1, \textcolor{red}{0}, \dots)$

Codificação simbólica



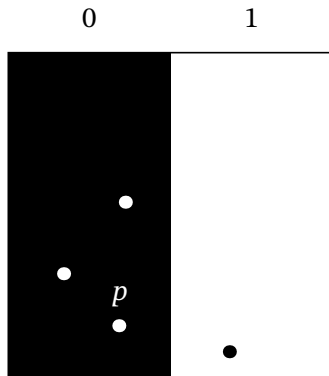
(... , 0; 0, 1, 0, ...)

Codificação simbólica



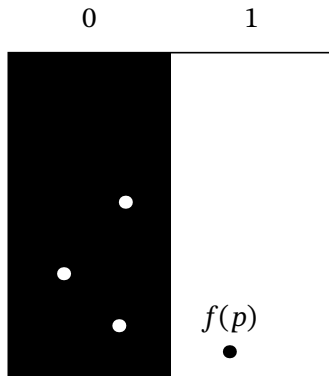
$(\dots, 0; 0, 1, 0, \dots)$

Deslocamento simbólico



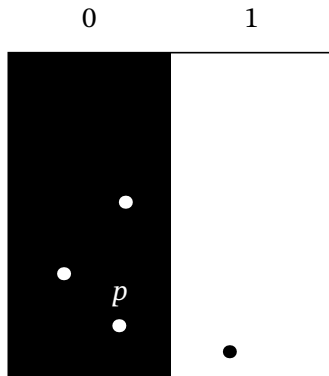
$$p \mapsto (\dots, 0; 0, 1, 0, \dots)$$

Deslocamento simbólico



$$f(p) \mapsto (\dots, 0, 0; 1, 0, \dots)$$

Deslocamento simbólico



$$(\dots, x_{-2}, 0; 0, 1, 0, \dots) \xrightarrow{\sigma} (\dots, 0, 0; 1, 0, x_3 \dots)$$

Dinâmica simbólica

Definição (Espaço simbólico)

$$\Sigma_n := \{(\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) \mid 0 \leq x_i < n\}$$

Dinâmica simbólica

Definição (Espaço simbólico)

$$\Sigma_n := \{(\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) \mid 0 \leq x_i < n\}$$

Definição (Deslocamento simbólico)

$$\begin{aligned}\sigma : \Sigma_n &\longrightarrow \Sigma_n \\ (\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) &\longmapsto (\dots, x_0; x_1, x_2, \dots)\end{aligned}$$

Section 2

Zip shifts

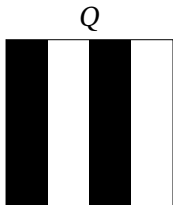
Zip shifts

- Introduzidos em S. Lamei e P. Mehdipour. “Zip shift Space”. Preprint. 2025 [1]

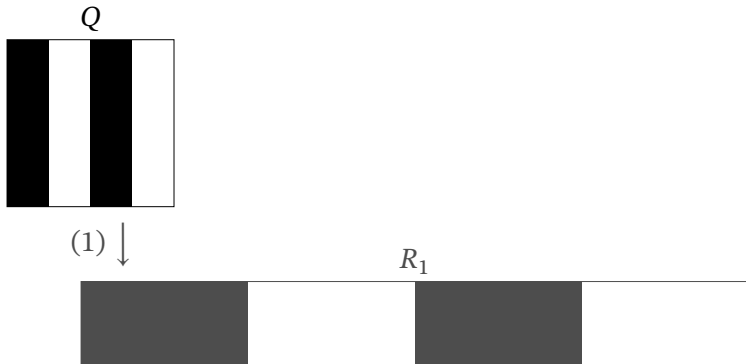
Zip shifts

- Introduzidos em S. Lamei e P. Mehdipour. “Zip shift Space”. Preprint. 2025 [1]
- Transformações do padeiro n -para-1 apresentadas em P. Mehdipour e N. S. Martins. “Encoding n -to-1 Baker’s Transformations”. *Archiv der Mathematik* 119.2 (2022), pp. 199–211 [4]

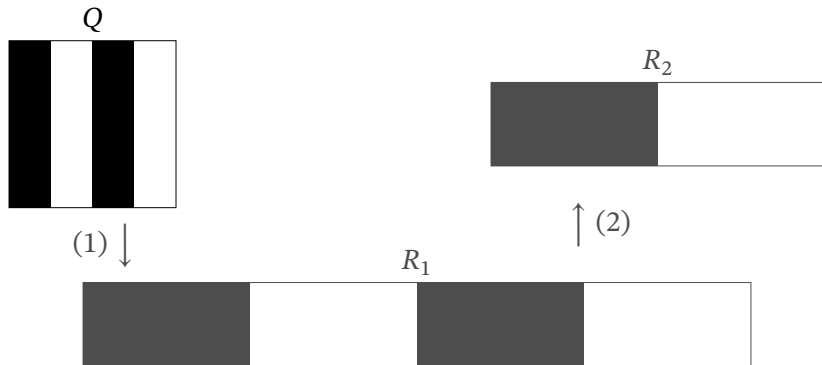
Transformação do padeiro 2-para-1



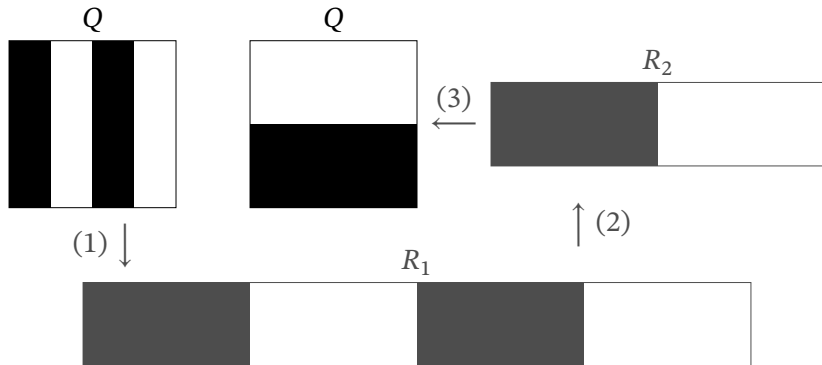
Transformação do padeiro 2-para-1



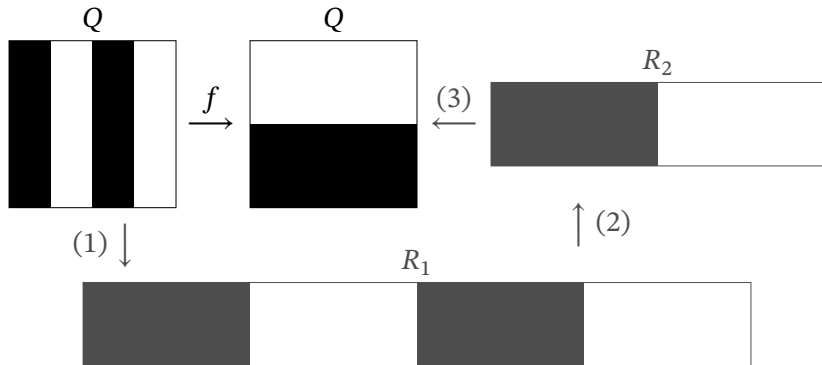
Transformação do padeiro 2-para-1



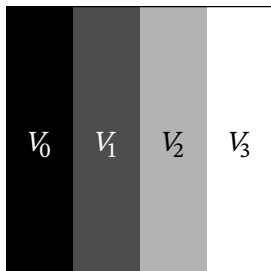
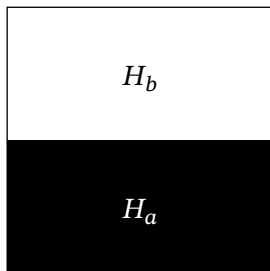
Transformação do padeiro 2-para-1



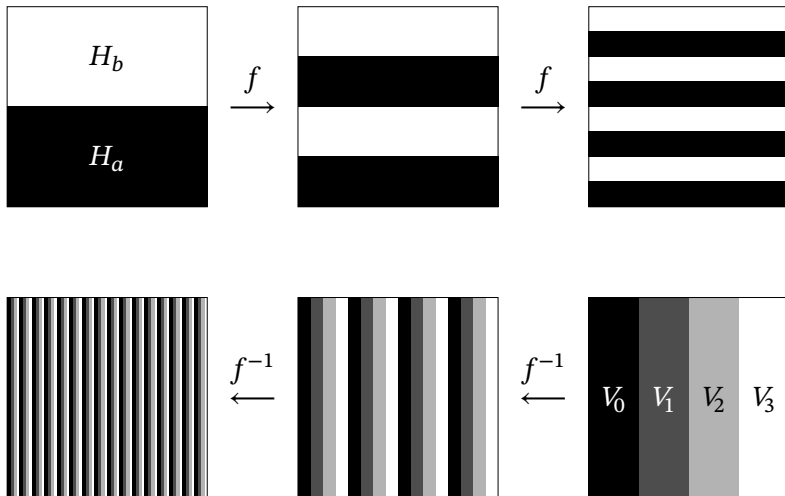
Transformação do padeiro 2-para-1



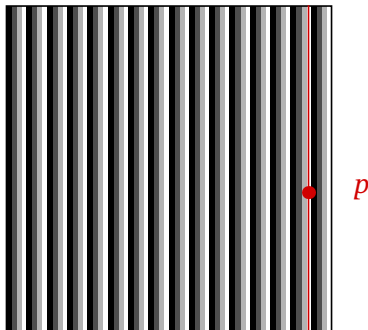
Partições horizontal e vertical

 $\mathcal{V}$  $\mathcal{H}$

Partições iteradas



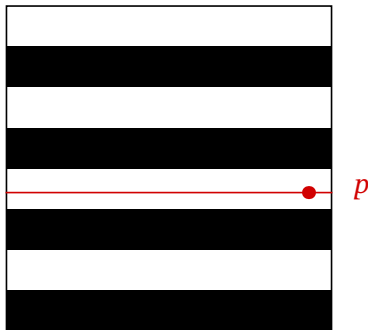
Codificação vertical



$$p \in V_{x_0} \cap f^{-1}(V_{x_1}) \cap f^{-2}(V_{x_2}) \dots$$

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) = (3, 2, 0, \dots)$$

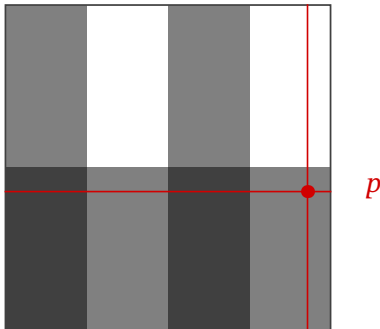
Codificação horizontal



$$p \in H_{x_{-1}} \cap f(H_{x_{-2}}) \cap f^2(H_{x_{-3}}) \dots$$

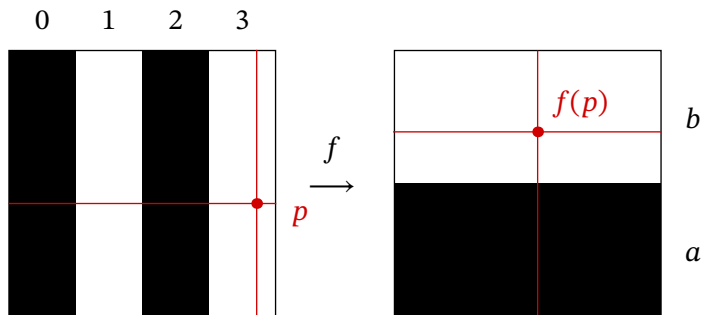
$$(\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}) = (\dots, a, b, a)$$

Codificação



$$x = (\dots, a, b, a; 3, 2, 0, \dots)$$

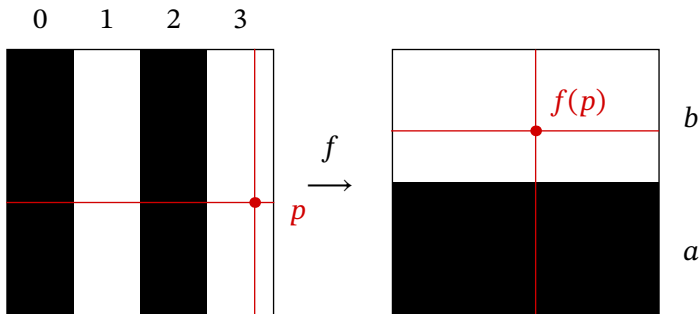
Deslocamento



$$\phi(0) = \phi(2) = a$$

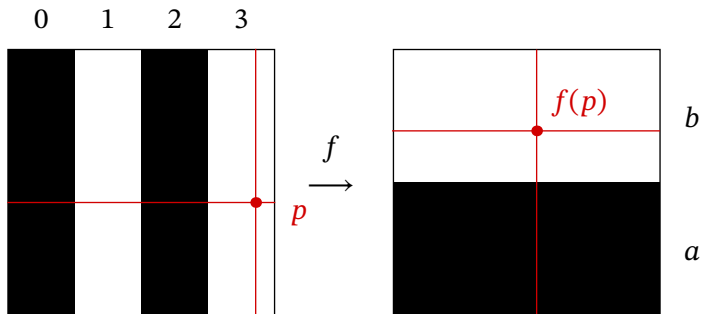
$$\phi(1) = \phi(3) = b$$

Deslocamento



$$(\dots, b, a; 3, 2, 0, \dots) \xrightarrow{\sigma} (\dots, b, a, \phi(3); 2, 0, \dots)$$

Deslocamento



$$(\dots, b, a; 3, 2, 0, \dots) \xrightarrow{\sigma} (\dots, b, a, \textcolor{red}{b}; 2, 0, \dots)$$

Dinâmica simbólica do Zip Shift

Definição (Espaço simbólico do Zip Shift)

$$\Sigma_{n_-, n_+} := \left\{ (\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) \mid \begin{array}{ll} 0 \leq x_i < n_- & i < 0 \\ 0 \leq x_i < n_+ & i \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dinâmica simbólica do Zip Shift

Definição (Espaço simbólico do Zip Shift)

$$\Sigma_{n_-, n_+} := \left\{ (\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) \mid \begin{array}{ll} 0 \leq x_i < n_- & i < 0 \\ 0 \leq x_i < n_+ & i \geq 0 \end{array} \right\}$$

Definição (Zip Shift)

$$\phi : \{0, \dots, n_+ - 1\} \rightarrow \{0, \dots, n_- - 1\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi : \Sigma_{n_-, n_+} &\longrightarrow \Sigma_{n_-, n_+} \\ (\dots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) &\longmapsto (\dots, x_{-1}, \phi(x_0); x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

Estrutura mensurável em Σ_{n_-, n_+}

Definição (Cilindro)

Dado $i \in \mathbb{Z}$, e $s \in \{0, \dots, n_- - 1\}$ (se $i < 0$) ou $s \in \{0, \dots, n_+ - 1\}$ (se $i \geq 0$), definimos

$$C_i^s := \{x \in \Sigma_{n_-, n_+} \mid x_i = s\}.$$

Definição (Partição por cilindros)

$$\mathcal{C}_i := \begin{cases} \{C_i^s \mid s \in \{0, \dots, n_+ - 1\}\} & i \geq 0 \\ \{C_i^s \mid s \in \{0, \dots, n_- - 1\}\} & i < 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_{i, \dots, i'} := \bigvee_{i \leq j \leq i'} \mathcal{C}_j.$$

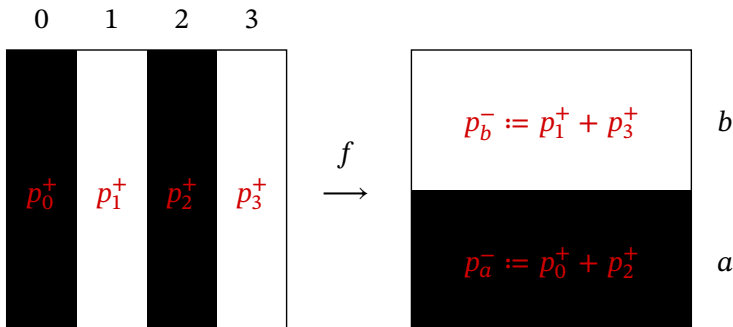
Estrutura mensurável em Σ_{n_-,n_+}

Lema (Martins, M—, Varão [3])

Para todo $i \geq 0$,

1. $\sigma^i(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_{-i}$;
2. $\sigma^{-i}(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_i$;
3. $\sigma^{-i}(\mathcal{C}_{-(i+1)}) = \mathcal{C}_{-1}$;
4. $\mathcal{C}_0^n = \mathcal{C}_{0,\dots,n-1}$.
5. $\mathcal{C}_0^{\pm n} = \mathcal{C}_{-n,\dots,n-1}$.

Estrutura de medida em Σ_{n_-, n_+}



Estrutura de medida Σ_{n_-, n_+}

Definição (Medida)

Distribuição de probabilidade

$$p^+ = (p_0^+, \dots, p_{n_+-1}^+) \in \Delta^{n_+-1}.$$

Estrutura de medida Σ_{n_-, n_+}

Definição (Medida)

Distribuição de probabilidade

$$p^+ = (p_0^+, \dots, p_{n_+-1}^+) \in \Delta^{n_+-1}.$$

Empurre por ϕ para $p^- \in \Delta^{n_- - 1}$:

$$p_s^- := \sum_{r \in \phi^{-1}(s)} p_r^+.$$

Estrutura de medida Σ_{n_-, n_+}

Definição (Medida)

Distribuição de probabilidade

$$p^+ = (p_0^+, \dots, p_{n_+-1}^+) \in \Delta^{n_+-1}.$$

Empurre por ϕ para $p^- \in \Delta^{n_- - 1}$:

$$p_s^- := \sum_{r \in \phi^{-1}(s)} p_r^+.$$

Defina a medida m em Σ_{n_-, n_+} por

$$m(C_i^s) := \begin{cases} p_s^- & i < 0 \\ p_s^+ & i \geq 0 \end{cases}$$

Section 3

Entropia de medida

Entropia de medida

A *entropia* de uma partição $\mathcal{P}$ com respeito a uma medida m é

$$H_m(\mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} -m(P) \log(m(P)).$$

Entropia de medida

A *entropia* de uma partição $\mathcal{P}$ com respeito a uma medida m é

$$H_m(\mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} -m(P) \log(m(P)).$$

A *entropia* de uma dinâmica $f : X \rightarrow X$ com respeito a $\mathcal{P}$ é

$$h_m(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_m(\mathcal{P}^n).$$

Entropia de medida

A *entropia* de uma partição $\mathcal{P}$ com respeito a uma medida m é

$$H_m(\mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} -m(P) \log(m(P)).$$

A *entropia* de uma dinâmica $f : X \rightarrow X$ com respeito a $\mathcal{P}$ é

$$h_m(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_m(\mathcal{P}^n).$$

A *entropia* de uma dinâmica $f : X \rightarrow X$ é

$$h_m(f) := \sup_{\mathcal{P}} h_m(f, \mathcal{P}).$$

Teorema de Kolmogorov–Sinai

Theorem ([6, Theorem 9.2.1])

Sejam

- $f : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva medida;
- $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de partições que gera a σ -álgebra.

Então

$$h_m(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_m(f, \mathcal{P}_n).$$

Entropia de partição por cilindros

Lema (Martins, M—, Varão [3])

1. $H_m(\mathcal{C}_0) = \sum_{s=0}^{n_+-1} -p_s^+ \log(p_s^+);$
2. $H_m(\mathcal{C}_{-1}) = \sum_{s=0}^{n_- -1} -p_s^- \log(p_s^-);$
3. $H_m(\mathcal{C}_{-n, \dots, 0, \dots, n'-1}) = nH_m(\mathcal{C}_{-1}) + n'H_m(\mathcal{C}_0).$

Sequência crescente de partições

Definição

$$\mathcal{P}_n := \mathcal{C}_0^{\pm n} = \mathcal{C}_{-n, \dots, n-1}.$$

Sequência crescente de partições

Definição

$$\mathcal{P}_n := \mathcal{C}_0^{\pm n} = \mathcal{C}_{-n, \dots, n-1}.$$

Queremos calcular

$$h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_m(\mathcal{P}_n^k),$$

então temos que calcular $\mathcal{P}_n^k$.

Sequência crescente de partições

Definição

$$\mathcal{P}_n := \mathcal{C}_0^{\pm n} = \mathcal{C}_{-n, \dots, n-1}.$$

Queremos calcular

$$h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_m(\mathcal{P}_n^k),$$

então temos que calcular $\mathcal{P}_n^k$.

Lema (Martins, M—, Varão [3])

$$\mathcal{P}_n^k = \mathcal{C}_{-n, \dots, n+k-2}.$$

Demonstração complexa!

Entropia de medida

Lema (Martins, M—, Varão [3])

$$h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) = H_m(\mathcal{C}_0).$$

Entropia de medida

Lema (Martins, M—, Varão [3])

$$h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) = H_m(\mathcal{C}_0).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} H_m(\mathcal{P}_n^k) &= H_m(\mathcal{C}_{-n, \dots, n-1+k-1}) \\ &= nH_m(\mathcal{C}_{-1}) + (n+k-1)H_m(\mathcal{C}_0), \end{aligned}$$

Entropia de medida

Lema (Martins, M—, Varão [3])

$$h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) = H_m(\mathcal{C}_0).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} H_m(\mathcal{P}_n^k) &= H_m(\mathcal{C}_{-n, \dots, n-1+k-1}) \\ &= nH_m(\mathcal{C}_{-1}) + (n+k-1)H_m(\mathcal{C}_0), \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_m(\mathcal{P}_n^k) \\ &= H_m(\mathcal{C}_0). \end{aligned}$$



Entropia de medida

Theorem (Martins, M—, Varão [3])

$$h_m(\sigma) = H_m(\mathcal{C}_0).$$

Entropia de medida

Theorem (Martins, M—, Varão [3])

$$h_m(\sigma) = H_m(\mathcal{C}_0).$$

Demonstração.

Por Kolmogorov-Sinai e pelos lemas,

$$\begin{aligned} h_m(\sigma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_m(\sigma, \mathcal{P}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} H_m(\mathcal{C}_0) \\ &= H_m(\mathcal{C}_0). \end{aligned}$$



Exemplo 2-para-1

No exemplo do mapa do padeiro 2-para-1 com a distribuição uniforme $p^+ = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, obtemos

$$h_m(\sigma) = \sum_{s=0}^3 -\frac{1}{4} \log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(4).$$

Section 4

Entropia de dobra

Entropia de dobra

- Introduzida por Ruelle em [5];

Entropia de dobra

- Introduzida por Ruelle em [5];
- Apresentada como uma entropia condicional por Liu, Wu e Zhu em [2, 7].

Entropia de dobra

- Introduzida por Ruelle em [5];
- Apresentada como uma entropia condicional por Liu, Wu e Zhu em [2, 7].

Definição (Entropia de dobra)

Dada a partição atômica

$$\epsilon := \{\{x\} \mid x \in X\},$$

a *entropia de dobra* de f com respeito a m é

$$\mathcal{F}(f) := H_m(\epsilon \mid f^{-1}(\epsilon)).$$

Propriedade da entropia de dobra

- $\mathcal{F}(f) \leq \log n$ quando f é n -para-1;

Propriedade da entropia de dobra

- $\mathcal{F}(f) \leq \log n$ quando f é n -para-1;
- $\mathcal{F}(f) = \log n$ se as pré-imagens são igualmente m -ponderadas;

Propriedade da entropia de dobra

- $\mathcal{F}(f) \leq \log n$ quando f é n -para-1;
- $\mathcal{F}(f) = \log n$ se as pré-imagens são igualmente m -ponderadas;
- $\mathcal{F}(f) = 0$ se f é invertível.

Entropia de dobra

Theorem (Martins, M—, Varão [3])

$$\mathcal{F}(\sigma) = \sum_{0 \leq s < n_-} H_{\Delta}(q^s) p_s^- = H_m(\mathcal{C}_0) - H_m(\mathcal{C}_{-1}).$$

Entropia de dobra

Theorem (Martins, M—, Varão [3])

$$\mathcal{F}(\sigma) = \sum_{0 \leq s < n_-} H_{\Delta}(q^s) p_s^- = H_m(\mathcal{C}_0) - H_m(\mathcal{C}_{-1}).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma) &= H_m(\epsilon \mid \sigma^{-1}(\epsilon)) \\ &= \int_{\hat{x} \in \sigma^{-1}(\epsilon)} H_{m_{\hat{x}}}(\epsilon|_{\hat{x}}) \hat{m}(d\hat{x}) \\ &= \sum_{0 \leq s < n_-} \int_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{C}}_{-1}^s} H_{m_{\hat{x}}}(\epsilon|_{\hat{x}}) \hat{m}(d\hat{x}) \\ &= \sum_{0 \leq s < n_-} H_{\Delta}(q^s) p_s^-. \end{aligned}$$



Relação entre entropia métrica e entropia de dobra

Como $h_m(\sigma) = H_m(\mathcal{C}_0)$, segue que

Relação entre entropia métrica e entropia de dobra

Como $h_m(\sigma) = H_m(\mathcal{C}_0)$, segue que

Theorem (Martins, M—, Varão [3])

$$h_m(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma) + H_m(\mathcal{C}_{-1}).$$

Exemplo 2-para-1

No exemplo do mapa do padeiro 2-para-1 com a distribuição uniforme $p^+ = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, temos $p^- = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e obtemos

$$H_m(\mathcal{C}_{-1}) = \sum_{s=0}^1 -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2)$$

portanto

$$\mathcal{F}(\sigma) = \log(4) - \log(2) = \log(2).$$

Referências

- [1] S. Lamei e P. Mehdipour. “Zip shift Space”. Preprint. 2025.
- [2] P.-D. Liu. “Ruelle Inequality Relating Entropy, Folding Entropy and Negative Lyapunov Exponents”. *Communications in Mathematical Physics* 240 (2003), pp. 531–538.
- [3] N. Martins, P. G. Mattos e R. Varão. “Folding and Metric Entropies for Extended Shifts”. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2026).
- [4] P. Mehdipour e N. S. Martins. “Encoding n -to-1 Baker’s Transformations”. *Archiv der Mathematik* 119.2 (2022), pp. 199–211.
- [5] D. Ruelle. “Positivity of Entropy Production in Nonequilibrium Statistical Mechanics”. *Journal of Statistical Physics* 85 (1996), pp. 1–23.
- [6] M. Viana e K. Oliveira. “Foundations of Ergodic Theory”. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.
- [7] W. Wu e Y. Zhu. “On Preimage Entropy, Folding Entropy and Stable Entropy”. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 41.4 (2021), pp. 1217–1249.